



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАДИОЛОКАЦИИ И РАДИОНАВИГАЦИИ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Учебник

Министерство
обороны РФ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАДИОЛОКАЦИИ И РАДИОНАВИГАЦИИ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Под общей редакцией А.А. Филонова

Рекомендуется Федеральным государственным казенным военным образовательным учреждением высшего профессионального образования ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации в качестве учебника для курсантов учебного военного центра Военно-инженерного института Сибирского федерального университета, обучающихся по специальности 11.05.01 – «Радиоэлектронные системы и комплексы», рег. номер 445 от 2 сентября 2015 г.

Красноярск
СФУ
2015

УДК 621.396.96(07)+537.8(07)

ББК 32.95я73+22.33я73

О-28

Авторы:

А.А. Филонов, А.Н. Фомин, В.Н. Тяпкин, Д.Д. Дмитриев,
Ю.Л. Фатеев, Т.А. Марарескул, И.Н. Ищук

О-28

Общая теория радиолокации и радионавигации. Теория электромагнитного поля : учебник / А.А. Филонов, А.Н. Фомин, В.Н. Тяпкин [и др.]; под общ. ред. А.А. Филонова. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2015. – 218 с.

ISBN 978-5-7638-3391-1

Рассмотрены основные положения электродинамики, возбуждаемые электромагнитные поля в неограниченном однородном пространстве, граничные задачи. Изложены основные положения геометрической оптики, понятия о распространении электромагнитных волн в неоднородных и анизотропных средах. Особое внимание уделено физической интерпретации явлений электромагнетизма.

Предназначен для курсантов учебного военного центра Военно-инженерного института Сибирского федерального университета, обучающихся по специальности 11.05.01 – «Радиоэлектронные системы и комплексы», а также для всех интересующихся теорией электромагнитного поля.

Электронный вариант издания см.:
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 621.396.96(07)+537.8(07)
ББК 32.95я73+22.33я73

ISBN 978-5-7638-3391-1

© Сибирский федеральный университет, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения.....	6
Предисловие	8
Глава 1. Электромагнитное поле. Основные определения и характеристики.....	9
1.1. Электрический заряд. Плотность заряда.....	9
1.2. Электрический ток. Плотность тока	11
1.3. Векторы электромагнитного поля	13
1.4. Классификация и параметры сред	17
Глава 2. Основные уравнения электромагнитного поля	20
2.1. Первое уравнение Максвелла (закон полного тока).....	20
2.2. Второе уравнение Максвелла	23
2.3. Третье уравнение Максвелла	25
2.4. Четвертое уравнение Максвелла	27
2.5. Уравнения электродинамики в дифференциальной форме	28
2.5.1. Первое уравнение Максвелла	28
2.5.2. Второе уравнение Максвелла	28
2.5.3. Третье и четвертое уравнения Максвелла.....	29
2.5.4. Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности).....	30
2.6. Полная система уравнений электродинамики	33
2.7. Граничные условия для векторов электромагнитного поля	35
2.7.1. Граничные условия для нормальных составляющих векторов поля.....	36
2.7.2. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов поля.....	40
2.7.3. Полная система граничных условий. Граничные условия на границе с идеальным проводником	45
2.8. Метод комплексных амплитуд при анализе гармонических полей	48
2.8.1. Гармонические поля. Комплексные векторы поля	48
2.8.2. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд.....	49
2.8.3. Понятие о комплексных проницаемостях.....	52
2.9. Общие свойства уравнений электромагнитного поля	55
2.9.1. Принцип суперпозиции	55
2.9.2. Принцип перестановочной двойственности	56
2.9.3. Принцип (теорема) взаимности.....	57
2.10. Методы решения уравнений электромагнитного поля.....	59

2.10.1. Теорема единственности решений уравнений ЭМП	59
2.10.2. Метод волновых уравнений для векторов ЭМП	62
2.10.3. Метод электродинамических потенциалов.....	64
2.10.4. Метод электрического вектора Герца.....	67
2.10.5. Решение неоднородного волнового уравнения. Запаздывающие потенциалы	68
2.10.6. Решение однородного волнового уравнения методом разделения переменных	73
2.10.7. Формула Кирхгофа	75
Глава 3. Энергетические соотношения в электромагнитном поле.....	77
3.1. Баланс энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга	77
3.2. Комплексный вектор Пойнтинга	84
3.3. Примеры применения уравнения баланса энергии.....	86
Глава 4. Элементарные источники электромагнитных волн	91
4.1. Элементарный электрический вибратор	91
4.1.1. Расчет поля элементарного электрического вибратора.....	92
4.1.2. Анализ поля элементарного электрического вибратора в ближней зоне.....	99
4.1.3. Анализ поля элементарного электрического вибратора в дальней зоне	101
4.1.4. Направленные свойства элементарного электрического вибратора.....	105
4.1.5. Мощность излучения элементарного электрического вибратора. Сопротивление излучения	109
4.2. Элементарный магнитный вибратор	112
4.3. Поле элемента фазового фронта волны (элемента Гюйгенса).....	119
4.4. Элементарная щель.....	124
Глава 5. Распространение плоских электромагнитных волн в различных средах.....	129
5.1. Плоские электромагнитные волны в однородной, изотропной, непроводящей среде	129
5.2. Плоские электромагнитные волны в однородной, изотропной, проводящей среде	137
5.2.1. Свойства плоских электромагнитных волн в реальном диэлектрике.....	145
5.2.2. Свойства плоских электромагнитных волн в реальном проводнике	147

5.3. Поляризация плоских электромагнитных волн.....	152
5.3.1. Условия получения ЭМВ линейной поляризации	157
5.3.2. Условия получения ЭМВ круговой поляризации	158
5.3.3. Условия получения ЭМВ эллиптической поляризации	159
5.4. Плоские электромагнитные волны в анизотропных и неоднородных средах.....	161
5.5. Законы отражения и преломления плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела двух однородных сред.....	167
5.5.1. Коэффициенты отражения и преломления при вертикальной поляризации	169
5.5.2. Коэффициенты отражения и преломления при горизонтальной поляризации	175
5.5.3. Анализ коэффициентов Френеля	178
5.5.4. Явление полного внутреннего отражения. Преломление электромагнитных волн в оптически плотную среду.....	183
Заключение.....	186
Библиографический список.....	187
Приложение 1.....	188
Приложение 2.....	212

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

ε_a	– абсолютная диэлектрическая проницаемость среды
μ_a	– абсолютная магнитная проницаемость среды
ε	– относительная диэлектрическая проницаемость среды
$\dot{\varepsilon}_a$	– комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды
ε'	– вещественная часть $\dot{\varepsilon}_a$
ε''	– мнимая часть $\dot{\varepsilon}_a$
μ	– относительная магнитная проницаемость среды
ε_0	– электрическая постоянная вакуума
μ_0	– магнитная постоянная вакуума
σ	– удельная проводимость среды
$\bar{x}^\circ, \bar{y}^\circ, \bar{z}^\circ$	– координатные орты соответствующих переменных декартовой системы координат
$\vec{E}'(x, y),$ $\vec{H}'(x, y)$	– комплексные векторные функции распределения поля в поперечном сечении
ρ_s	– поверхностная плотность заряда на границе раздела сред
\vec{n}°	– единичный вектор, указывающий направление нормали к границе раздела сред
\vec{J}_s	– вектор плотности поверхностного тока
∇^2	– оператор Лапласа в декартовой системе координат
∇	– векторный оператор набла (оператор Гамильтона)
$e^{j\omega t - \dot{\gamma}z}$	– волновой множитель
$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$	– постоянная распространения
α	– постоянная (коэффициент) затухания
β	– фазовая постоянная
$P_{\text{мгн}}$	– мгновенная мощность, переносимая через поперечное сечение волновода
P_z	– продольная составляющая вектора Пойнтинга \vec{P}
I_m	– амплитуда тока
$\lambda_{\text{кр}}$	– критическая длина волны типа H_{mn} или типа E_{mn} в волноводе
$\alpha_{\text{п}}$	– коэффициент затухания
$\alpha_{\text{пм}}$	– коэффициент затухания, учитывающий потери в металлических стенках волновода

$\alpha_{\text{пд}}$	– коэффициент затухания, учитывающий потери в диэлектрике, заполняющем волновод
R_s	– поверхностное сопротивление
l	– периметр проводящей поверхности в плоскости поперечного сечения
S	– площадь поперечного сечения волновода
\vec{E}	– вектор напряженности электрического поля
\vec{B}	– вектор магнитной индукции
\vec{D}	– вектор электрической индукции (электрического смещения)
\vec{H}	– вектор напряженности магнитного поля
$d\vec{l} = \vec{\tau}^\circ dl$	– вектор, направленный по касательной к dl
$d\vec{s} = \vec{n}^\circ ds$	– вектор, направленный по нормали к ds
$\vec{J}_{\text{см}}$	– вектор плотности тока смещения
$\vec{J}_{\text{полн}}$	– вектор плотности полного тока
$H_{\text{тм}}$	– амплитудное значение тангенциальной составляющей магнитного поля вблизи проводящей поверхности
$H_{\text{см}}$	– амплитудное значение поперечной составляющей магнитного поля в плоскости поперечного сечения
ρ_0	– волновое сопротивление среды, заполняющей волновод
$\vec{\Psi}_m$	– амплитудное значение любого из векторов ЭМП
$e^{j\omega t}$	– временной множитель
$j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}$	– мнимая единица
$\text{tg } \delta$	– тангенс угла потерь
$k'' = \alpha$	– коэффициент затухания
$k' = \beta$	– коэффициент фазы
v	– скорость распространения электромагнитных волн в среде
$v_{\text{гр}}$	– групповая скорость
$v_{\text{ф}}$	– фазовая скорость
λ	– длина волны
λ_0	– длина волны в вакууме
Нп	– Непер
дБ	– децибел

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник предназначен курсантам учебных военных центров с целью глубокого изучения дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн» по специальности «Эксплуатация и ремонт радиолокационных комплексов противовоздушной обороны Военно-воздушных сил».

Современное развитие радиотехники идет по пути освоения все более высоких частот и все более широкого внедрения принципов микроэлектроники. В этих условиях непрерывно возрастают требования к объему и уровню подготовки радиоинженеров по электродинамике СВЧ, в частности по теории электромагнитного поля (ЭМП). Эти факторы определяют необходимость периодического обновления содержания учебных дисциплин, а также издания новых учебников и учебных пособий.

Теория электромагнитного поля представляет собой первый – основополагающий – раздел дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн», в котором представлены общие закономерности макроскопических электромагнитных процессов.

Теория электромагнитного поля позволяет изучать явления излучения, распространения и приема радиоволн, процессы передачи энергии в различных типах направляющих систем, принципы действия многих функциональных устройств систем радиотехнического вооружения, применяемых в ВВС. Поэтому данный раздел является теоретической базой для последующих разделов дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн», а также для ряда инженерных дисциплин, определяющих подготовку радиоинженера.

В теории электромагнитного поля изучаются свойства одного из видов материи – электромагнитного поля. Для глубокого усвоения основ теории электромагнитного поля необходимо знание физических явлений и процессов в электростатике и магнитостатике, основных понятий теории колебаний и волн и теорем векторного исчисления, дифференциальных уравнений, теории комплексных величин.

С целью проверки степени усвоения учебного материала обучающимся рекомендуется после отработки материала лекции ответить на контрольные вопросы и решить типовые задачи, изложенные в прил. 1.

При составлении учебного пособия авторы широко использовали как собственный опыт чтения лекций и принципы изложения материала, сложившийся в коллективах, так и опыт изложения различных вопросов электродинамики в учебниках, учебных пособиях и монографиях других авторов.

Глава 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Электромагнитное поле – это особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся способностью распространяться в вакууме (в отсутствие сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, и оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости.

Источниками электромагнитного поля являются неподвижные и движущиеся электрические заряды (токи), так как ЭМП обнаруживается (возбуждается) в местах, где имеются заряды и токи.

Рассмотрим основные величины, характеризующие источники ЭМП.

1.1. Электрический заряд. Плотность заряда

Теория электромагнетизма, изучаемая в дисциплине «Электродинамика и распространение радиоволн», оперирует с макроскопическими значениями электромагнитных величин, представляющих собой их усреднение по времени и пространству. С точки зрения макроскопической теории среда представляется сплошной и покоящейся, а величины, характеризующие ЭМП и его источники, – непрерывно распределенными в пространстве.

Заряд как мера электризации среды может быть *положительным* и *отрицательным* и существует в виде заряженных частиц.

Заряд определяет свойства некоторого физического тела в целом. Следовательно, он характеризуется интегральной величиной, которую будем обозначать q . Величина заряда измеряется в кулонах (Кл).

Элементарной заряженной частицей является электрон, заряд которого $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. В состав атома каждого элемента входит определенное количество электронов. Атом в целом нейтрален, так как в нем имеется положительный заряд, равный сумме зарядов всех электронов. Если атом теряет один или несколько электронов, то он становится положительно заряженным ионом.

В электродинамике часто используют понятие *точечных зарядов*, под которыми понимают заряженные тела, размеры которых малы по сравнению с расстояниями между телами. Заряженное тело может иметь такие размеры, что заряд, сосредоточенный в теле, нельзя рассматривать

как точечный, при этом заряд может быть распределен как в теле, так и по поверхности.

Для описания распределения заряда вводится понятие *плотности заряда* ρ . Плотность заряда является функцией пространственных координат и времени $\rho(x, y, z, t)$. Различают *объемную, пространственную и линейную* плотности зарядов.

Примером неравномерно заряженной области может служить междуэлектродное пространство электронной лампы.

Объемная плотность ρ определяется как предел отношения заряда Δq к величине объема ΔV при стремлении объема к нулю (рис. 1.1), где Δq – заряд в объеме ΔV .

В некоторых случаях заряд q конечной величины распределен на поверхности некоторого тела в бесконечно тонком слое (например, заряд на обкладках конденсатора).

В этом случае вводится понятие *поверхностной* плотности заряда ρ_s , Кл/м², определяемое аналогично (рис. 1.2):

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS},$$

где Δq – заряд на участке плоскости ΔS .

Иногда можно считать заряд q сосредоточенным на линии, например, на бесконечно тонком проводе, проволочной антенне или тонком пучке электронов. В этом случае вводится понятие *линейной* плотности заряда ρ_l , Кл/м, (рис. 1.3):

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l},$$

где Δl – элемент длины провода, на котором сосредоточен элементарный заряд Δq .

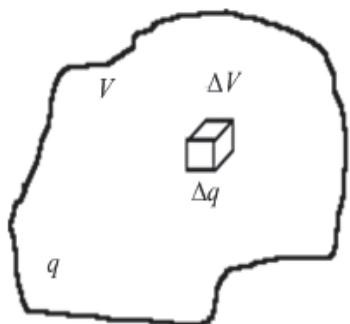


Рис. 1.1. К определению понятия объемной плотности зарядов

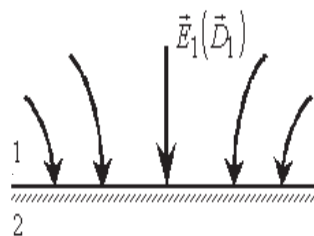


Рис. 1.2. К определению понятия поверхностной плотности зарядов

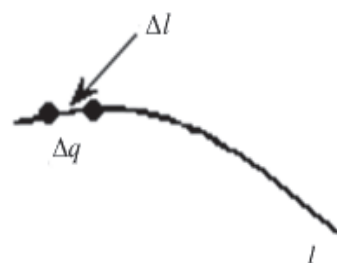


Рис. 1.3. К определению понятия линейной плотности зарядов

Очевидно, что полный заряд q в области V на поверхности S и вдоль линии l можно определить соответственно как:

$$q(x, y, z, t) = \int_v \rho(x, y, z, t) dV;$$

$$q(x, y, z, t) = \int_s \rho(x, y, z, t) dS;$$

$$q(x, y, z, t) = \int_l \rho(x, y, z, t) dl.$$

1.2. Электрический ток. Плотность тока

Движущиеся заряды называют током проводимости. Протекание тока через произвольную площадку (например, через площадку поперечного сечения проводника) связано с переносом заряда q через эту площадку.

Ток – характеристика интегральная, поскольку относится ко всей площади сечения проводника. В пределах площадки сечения проводника ток может быть распределен неравномерно. Поэтому для описания распределения тока в пределах площадки вводится дифференциальный векторный параметр \vec{J} – плотность тока проводимости.

Различают объемную плотность тока проводимости \vec{J} и поверхностную \vec{J}_s .

Под объемной плотностью тока \vec{J} , А/м², будем понимать отношение силы тока ΔI , текущего через площадку ΔS , перпендикулярную к току ΔI (при $\Delta S \rightarrow 0$) (рис. 1.4):

$$\vec{J} = \vec{n}^\circ \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \vec{n}^\circ \frac{dI}{dS},$$

где \vec{n}° – единичный орт, определяющий направление тока в точке наблюдения.

Под поверхностной плотностью тока \vec{J}_s , А/м, будем понимать отношение силы тока ΔI_s , текущего по поверхности тела по полосе, шириной Δl , к этой полосе, когда $\Delta l \rightarrow 0$ (рис. 1.5)

$$|\vec{J}_s| = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I_s}{\Delta l} = \frac{dI_s}{dl}.$$

Очевидно, силу тока I , А, протекающего через некоторую поверхность S , и I_s – по поверхности S , можно определить соответственно:

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{s}; \quad I_s = \int_l \vec{J}_s d\vec{l},$$

где $d\vec{l} = \vec{\tau}^\circ \cdot dl$;

$d\vec{s} = \vec{n}^\circ \cdot ds$;

\vec{n}° – нормаль к элементарной площадке ds (рис. 1.6, а);

$\vec{\tau}^\circ$ – орт, касательный к элементу dl (рис. 1.6, б).

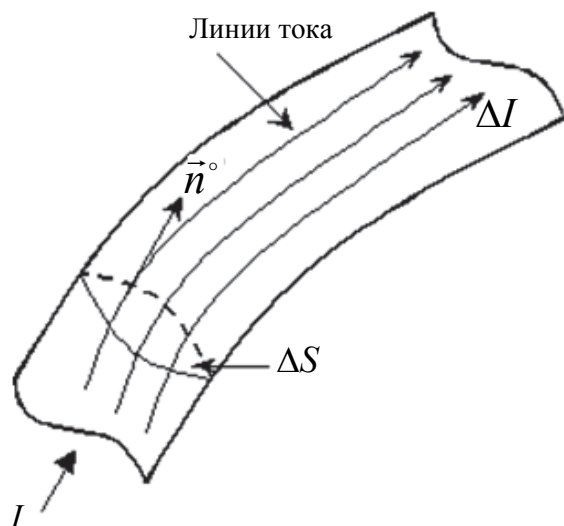


Рис. 1.4. К определению понятия
объемной плотности тока

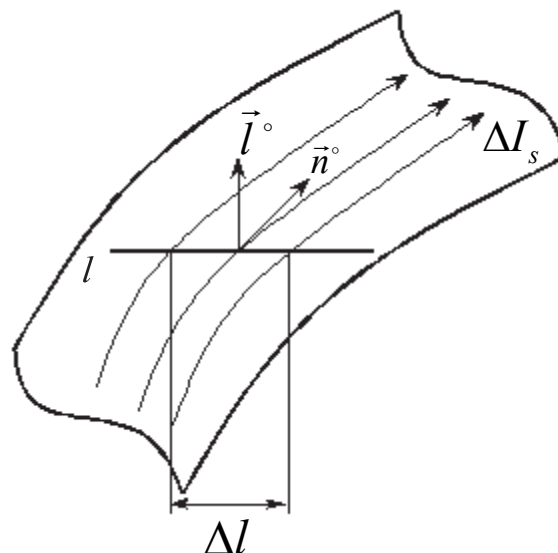
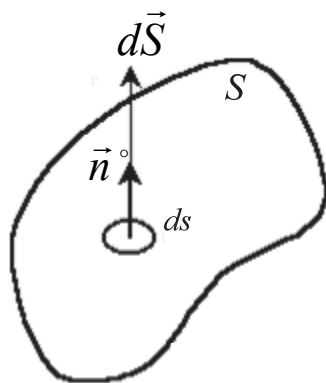
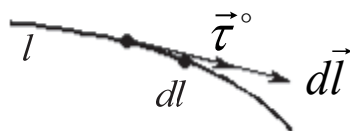


Рис. 1.5. К определению понятия
поверхностной плотности тока



а



б

Рис. 1.6. Определение силы тока:
а – через поверхность; б – по поверхности

Ток проводимости представляет собой поток свободных зарядов и может быть омическим и сторонним.

Омический ток I в среде течет под действием электрического поля волны и определяется из закона Ома в дифференциальной форме

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (1.1)$$

где σ – удельная проводимость среды, См/м;

\vec{E} – напряженность электрического поля.

Сторонний ток $I_{ст}$ течет под действием ЭДС генератора высокочастотных колебаний, его плотность обозначается $J_{ст}$. Генератор ЭДС создает так называемую стороннюю силу, действующую на заряды. Эта сила бывает самого разнообразного происхождения: механического, химического, теплового и др. Всегда можно сопоставить этой силе некоторое электрическое поле $E_{ст}$, которое будет двигать заряды так же, как сила реального электрического поля.

В этом случае закон Ома в дифференциальной форме принимает вид

$$\vec{J}_{полн} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{ст}) = \vec{J} + \vec{J}_{ст}.$$

1.3. Векторы электромагнитного поля

Электромагнитное поле можно охарактеризовать (описать) с помощью двух групп векторных функций пространственных координат и времени. К первой группе относятся *силовые* векторы поля, а ко второй – векторы, характеризующие связь источника с собственным электромагнитным полем.

Электромагнитное поле оказывает силовое воздействие на заряженные частицы. Эта сила \vec{F} – сила Лоренца – является суперпозицией сил, создаваемых электрической $\vec{F}_э$ и магнитной $\vec{F}_м$ составляющими поля:

$$\vec{F} = \vec{F}_э + \vec{F}_м = q(\vec{E} + [\vec{v}_э; \vec{B}]),$$

где $\vec{v}_э$ – вектор скорости движения заряженной частицы;

\vec{B} – вектор магнитной индукции.

В соответствии с формулой определим векторы \vec{E} и \vec{B} , характеризующие *силовое* действие электромагнитного поля на заряженные тела и частицы.

Вектор напряженности электрического поля \vec{E} в данной точке количественно равен пределу отношения силы, с которой поле действует на не-

подвижный точечный заряд в этой точке, к величине заряда при стремлении величины заряда к нулю

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_э}{q}.$$

Направление \vec{E} совпадает с направлением силы $\vec{F}_э$, действующей на положительный заряд.

При действии на движущийся заряд сила $\vec{F}_э$ может изменять скорость движения частицы как по величине, так и по направлению. Силовое действие электрического поля на движущийся электрон лежит в основе построения электровакуумных приборов (диоды, триоды, пентоды и т. д.).

В общем случае вектор напряженности электрического поля \vec{E} является функцией пространственных координат и времени, измеряется вектор \vec{E} в ньютонах на кулон (Н/Кл) или чаще всего в вольтах на метр (В/м), т. е. вектор напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t).$$

Силовое воздействие магнитного поля на движущийся в нем заряд определяется из соотношения

$$\vec{F}_м = q[\vec{v}_э; \vec{B}],$$

откуда видно, что магнитное поле оказывает механическое воздействие только на движущийся заряд ($\vec{v}_э \neq 0$).

Сила $\vec{F}_м$ имеет максимальное значение, если $\vec{v}_э \perp \vec{B}$,

$$F_{м \max} = q \cdot v_э \cdot B.$$

Таким образом, магнитная индукция B характеризует силовое воздействие магнитного поля и может быть определена из формулы

$$B = \frac{F_{м \max}}{q \cdot v_э}.$$

Сила $\vec{F}_м$ не изменяет скорости движения заряда $\vec{v}_э$, а создает нормальное ускорение, изменяя траекторию движения заряда.

Силовое действие магнитного поля на движущийся заряд используется в приборах СВЧ (магнетронах, лампах бегущей волны (ЛБВ), лампах обратной волны (ЛОВ) и др.).

В общем случае вектор магнитной индукции \vec{B} является функцией пространственных координат и времени, измеряется в теслах (Т) или вебер на квадратный метр (Вб/м²), т. е. вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t).$$

Таким образом, векторы \vec{E} и \vec{B} являются *силовыми* характеристиками поля, т. е. они характеризуют силу, с которой поле действует на единичный пробный заряд или ток, и *зависят* от свойств *среды*.

Вторую группу векторных функций пространственных координат и времени образуют:

- вектор электрической индукции (электрического смещения), Кл/м²

$$\vec{D} = \vec{D}(x, y, z, t);$$

- вектор напряженности магнитного поля, А/м

$$\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t).$$

Введение для характеристики ЭМП векторов \vec{D} и \vec{H} удобно тем, что в любой среде независимо от ее электромагнитных свойств:

- вектор электрического поля \vec{D} , созданного зарядом q , определяется только величиной этого заряда:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2};$$

- вектор магнитного поля \vec{H} определяется только макроскопическими токами, возбуждающими это поле:

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Векторы \vec{D} и \vec{H} являются *количественными* характеристиками поля, т. е. они характеризуют *величину* источника поля и *не зависят* от свойств *среды*.

Силовые и количественные характеристики поля связаны между собой материальными уравнениями или уравнениями среды:

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}; \tag{1.2}$$

$$\vec{B} = \mu_a \vec{H}, \tag{1.3}$$

где $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$ – *абсолютная диэлектрическая* проницаемость среды;

$\mu_a = \mu_0 \mu$ – *абсолютная магнитная* проницаемость среды;

ϵ – *относительная диэлектрическая* проницаемость среды – физическая величина, характеризующая свойства вещества и показывающая, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в данном веществе меньше силы их взаимодействия в вакууме;

μ – относительная магнитная проницаемость среды, показывающая, во сколько раз при заданном распределении макроскопических токов магнитная индукция в рассматриваемой точке поля в данном веществе, заполняющем все поле, больше, чем в вакууме;

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ – электрическая постоянная вакуума, Ф/м;}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ – магнитная постоянная вакуума, Гн/м.}$$

В дальнейшем часто будут использоваться выражения «определить поле» или «рассчитать поле». Что это означает?

Определить поле в некоторой области пространства – значит указать величину и направление векторов \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} и \vec{H} в каждой точке данной области для любого момента времени.

Определить ЭМП в каждой точке пространства можно не только аналитически с помощью формул, но и графически, используя силовые линии.

Силовой линией (рис. 1.7) называется линия, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением соответствующего вектора поля в данной точке.

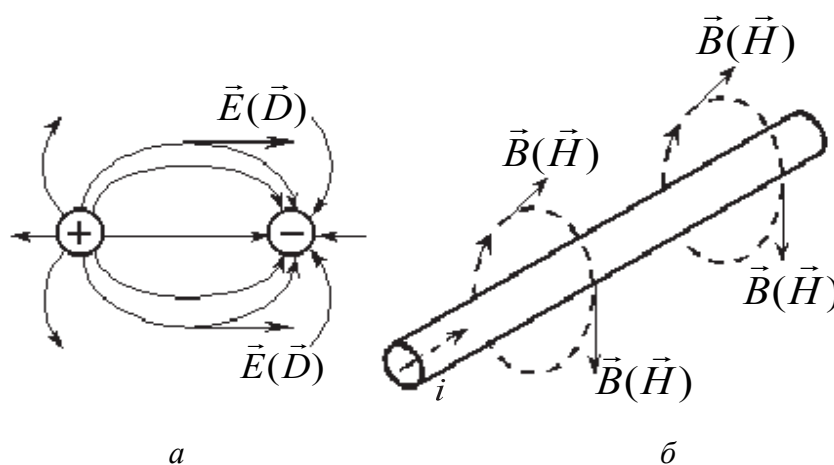


Рис. 1.7. Графическое определение ЭМП в некоторой области пространства с помощью силовых линий

Чтобы при помощи силовых линий изобразить не только направление, но и значение векторов, на графиках условно проводят силовые линии с определенной густотой так, чтобы число силовых линий, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярной силовым линиям, было пропорционально $|\vec{E}|$ или $|\vec{B}|$ в данной точке. Таким образом, чем сильнее поле, тем гуще силовые линии.

1.4. Классификация и параметры сред

Свойства среды характеризуют следующие параметры:

ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды;

μ_a – абсолютная магнитная проницаемость среды;

σ – удельная проводимость среды.

В основу классификации сред положено исследование *зависимости* данных параметров от *координат, времени и напряженности* поля.

В зависимости от свойств параметров ϵ_a , μ_a и σ различают следующие среды:

- нелинейные, в которых параметры ϵ_a , μ_a и σ (или хотя бы один из них) зависят от величины электрического или магнитного полей (например, сегнетодиэлектрики, ферромагнетики), т. е.

$$\epsilon = \epsilon(\vec{E}); \quad \mu = \mu(\vec{H}); \quad \sigma = \sigma(\vec{E});$$

- линейные, в которых параметры ϵ_a , μ_a и σ не зависят от величины электрического и магнитного полей.

Все реальные среды, по существу, являются нелинейными. Однако при не очень сильных полях во многих случаях можно пренебречь зависимостью ϵ_a , μ_a и σ от величины электрического и магнитного полей и считать, что рассматриваемая среда линейна.

В дальнейшем будут рассматриваться только линейные среды.

В свою очередь, *линейные и нелинейные* среды делятся на параметрические и с постоянными параметрами, однородные и неоднородные, изотропные и анизотропные.

Параметрическими называют среды, в которых ϵ_a , μ_a и σ (или хотя бы один из них) зависят от времени, т. е.

$$\epsilon = \epsilon(t); \quad \mu = \mu(t); \quad \sigma = \sigma(t).$$

Если такой зависимости нет, то среды будут с *постоянными параметрами*.

Среды, у которых хотя бы один из параметров ϵ_a , μ_a и σ является функцией координат (значения изменяются от точки к точке), называют неоднородными (например, атмосфера), т. е.

$$\epsilon = \epsilon(x, y, z); \quad \mu = \mu(x, y, z); \quad \sigma = \sigma(x, y, z).$$

Однородными называют среды, параметры ϵ_a , μ_a и σ в которых не зависят от координат, т. е. свойства среды одинаковы во всех ее точках.

Если свойства среды одинаковы по разным направлениям, то среду называют изотропной. Параметры изотропной среды не зависят от направ-

ления распространения электромагнитной волны. Для изотропных сред справедливы равенства:

$$\vec{D} = \epsilon_a \cdot \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}; \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

Из этих соотношений следует, что векторы \vec{D} и \vec{E} ; \vec{B} и \vec{H} ; \vec{J} и \vec{E} параллельны. Параметры ϵ_a , μ_a и σ являются здесь скалярными, вполне определенными для данной среды величинами.

Анизотропными называются среды, в которых параметры ϵ_a , μ_a и σ (или хотя бы один из них) различны в разных направлениях (например, кварц, ионосфера, намагниченный феррит, намагниченная плазма). Параметры анизотропной среды зависят от направления распространения электромагнитного поля.

Для анизотропных сред векторы \vec{D} и \vec{E} ; \vec{B} и \vec{H} ; \vec{J} и \vec{E} не параллельны и, следовательно, каждая проекция, например вектора \vec{B} , будет зависеть от трех проекций вектора \vec{H} , т. е.

$$B_x = \mu_{axx} H_x + \mu_{axy} H_y + \mu_{axz} H_z;$$

$$B_y = \mu_{ayx} H_x + \mu_{ayy} H_y + \mu_{ayz} H_z;$$

$$B_z = \mu_{azx} H_x + \mu_{azy} H_y + \mu_{azz} H_z.$$

В анизотропных средах параметры ϵ_a , μ_a и σ описываются с помощью *тензора*. Например, в ферромагнитных средах тензором является магнитная проницаемость μ_a . В общем случае ее записывают в виде матрицы:

$$\vec{\mu}_a = \begin{pmatrix} \mu_{axx} & \mu_{axy} & \mu_{axz} \\ \mu_{ayx} & \mu_{ayy} & \mu_{ayz} \\ \mu_{azx} & \mu_{azy} & \mu_{azz} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения среды для анизотропных сред запишутся в следующем виде:

$$\vec{D} = \epsilon_a \cdot \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}; \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

Таким образом, существует четыре независимых друг от друга признака, по которым классифицируются среды. Приведем такую классификацию для некоторых сред.

Вакуум – линейная, однородная, изотропная среда с постоянными параметрами.

Нижние слои атмосферы – изотропная, линейная, неоднородная среда с переменными параметрами. Параметры атмосферы определяются

температурой, давлением и влажностью воздуха, которые являются переменными во времени и частоте.

Тропосфера – линейная, неоднородная, изотропная, параметрическая среда.

Ионосфера – нелинейная, неоднородная, анизотропная, параметрическая среда.

Кварц – линейная, однородная, анизотропная среда с постоянными параметрами.

Ферриты – это ферромагнетики с очень малой проводимостью. В отсутствие внешнего поля это изотропная среда с высокими значениями ϵ и μ . Под действием внешнего магнитного поля феррит превращается в анизотропную среду.

Металлический проводник в постоянном магнитном поле (поперечном по отношению к направлению тока в нем) обладает анизотропией проводимости¹.

В дальнейшем анализ электромагнитного поля в основном будет проводиться для *линейных, однородных, изотропных сред с постоянными параметрами*.

Рассмотрим математический аппарат, определяющий взаимосвязь величин, характеризующих ЭМП, с величинами, характеризующими источники поля и среду.

¹ Известный из физики эффект Холла обусловлен анизотропией проводимости металла, помещенного в постоянное магнитное поле.

Глава 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Макроскопическая теория ЭМП базируется на фундаментальных законах природы – законах электромагнетизма. Математическая формулировка этих законов в наиболее общей форме была дана Дж. К. Максвеллом в 1864 г. и впервые опубликована в 1873-м. Уравнения Максвелла получены в результате обобщения накопленных к тому времени экспериментальных данных по исследованию явлений электромагнетизма. Дж. К. Максвелл обобщил известные закономерности для случая переменных полей. В теории электромагнетизма уравнения Максвелла играют такую же роль, как законы Ньютона в механике.

2.1. Первое уравнение Максвелла (закон полного тока)

Первое уравнение Максвелла описывает процесс возбуждения магнитного поля и является обобщением опытов Эрстеда и Ампера.

Опыты Г. Эрстеда показали, что вокруг проводника с постоянным током i возникает вихревое магнитное поле. Направление силовых линий \vec{H} (\vec{B}) магнитного поля связано с направлением тока \vec{i} правилом *правого буравчика*. Количественная связь между током и возбуждаемым им магнитным полем определяется *законом полного тока*.

Закон полного тока формулируется так: циркуляция² вектора напряженности магнитного поля \vec{H} по замкнутому контуру L равна потоку вектора плотности тока проводимости \vec{J} через любую поверхность S , опирающуюся на этот контур, т. е. току, охваченному контуром.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} = \sum_{n=1}^m i_n, \quad (2.1)$$

где $d\vec{l}$ – вектор, направленный по касательной к dl ;

$d\vec{s}$ – вектор, направленный по нормали к ds (рис. 2.1).

Было замечено, что закон полного тока справедлив только для цепей *постоянного* тока и не выполняется для цепей *переменного тока* (например, для цепи переменного тока с конденсатором, рис. 2.2).

² Циркуляция – это интеграл по замкнутому контуру L , т. е. \oint_L .

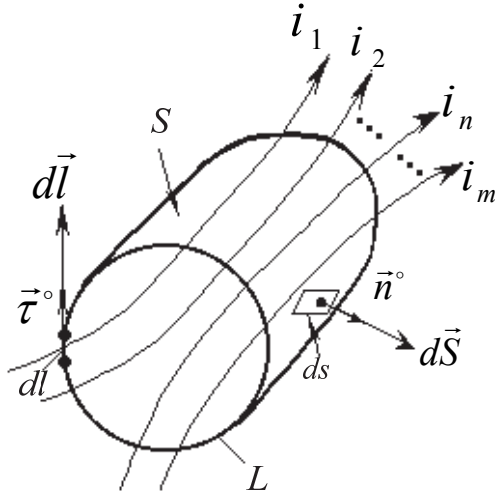


Рис. 2.1. Структура магнитного поля вокруг проводника с постоянным током i

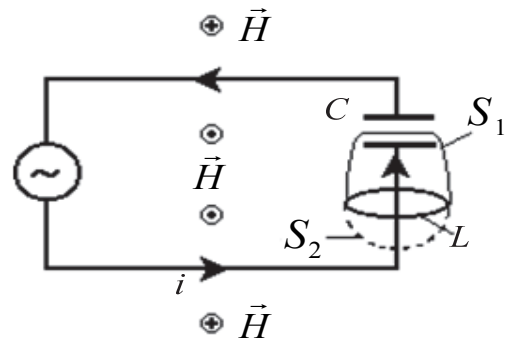


Рис. 2.2. Цепь переменного тока с конденсатором

Действительно, если в качестве поверхности выбрать S_1 , то ток проводимости эту поверхность не пересекает и правая часть выражения (2.1) будет равна нулю при неравенстве нулю левой части, так как контур L охватывает ток проводимости i , т. е.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0.$$

Если же выбрать поверхность S_2 , то равенства нулю правой части выражения (2.1) не будет, так как поверхность S_2 пересекается током i , т. е.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{J} d\vec{s} = i.$$

Из одного и того же закона следуют два *противоречивых результата*.

Устраняя это противоречие, Дж. К. Максвелл для случая переменных полей выдвинул гипотезу о существовании тока смещения ($i_{\text{см}}$), представляющего собой изменяющийся во времени поток³ вектора электрической индукции \vec{D} , который подобно току проводимости i возбуждает магнитное поле, т. е.

$$i_{\text{см}} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{s} = \int_S \vec{J}_{\text{см}} d\vec{s}, \quad (2.2)$$

где $\frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{J}_{\text{см}}$ – вектор плотности тока смещения, А/м².

³ Поток – это интеграл по поверхности S , т. е. \oint_S .

Максвелл объясняет природу тока смещения $i_{\text{см}}$ на основе анализа поведения молекул диэлектрика, находящегося в электрическом поле.

В результате действия электрической индукции D на тело диэлектрика образуется общее смещение «электричества», т. е. положительных и отрицательных зарядов молекул диэлектрика. Это смещение не представляет собой настоящего тока, так как, достигнув определенного значения, оно остается постоянным, т. е. диэлектрик поляризуется. Но это есть начало тока. Если изменится смещение, то образуются токи в положительном и отрицательном направлениях в зависимости от того, увеличивается смещение или уменьшается.

Вводя (2.2) в выражение (2.1), получим математическую запись первого уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} = i_{\text{пр}} + i_{\text{см}} = i_{\text{полн}}. \quad (2.3)$$

Читается закон так: циркуляция вектора напряженности магнитного поля \vec{H} по любому замкнутому контуру L равна сумме потока вектора плотности тока проводимости \vec{J} и скорости изменения потока вектора электрического смещения \vec{D} , пронизывающих любую поверхность S , опирающуюся на контур L .

Физическое содержание первого закона Максвелла

Магнитное поле создается либо током проводимости $i_{\text{пр}}$, либо изменяющимся во времени электрическим полем (током смещения $i_{\text{см}}$). При этом возникают замкнутые магнитные силовые линии, связанные правилом правого буравчика с направлением тока $i_{\text{пр}}$ или приращением вектора \vec{D} (рис. 2.3).

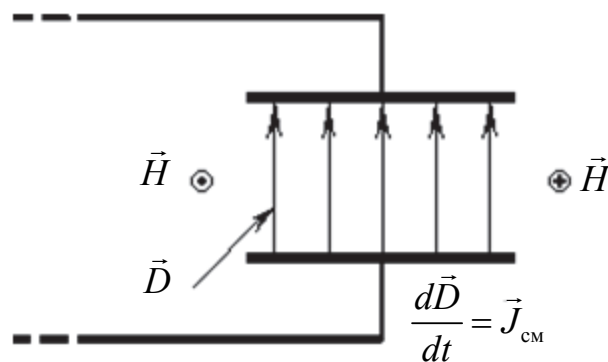


Рис. 2.3. Иллюстрация физического содержания первого закона Максвелла

Примечания:

1. Важность первого закона состоит в том, что он утверждает неизбежность возбуждения магнитного поля переменным электрическим полем

в *любой среде*, так как ток смещения $i_{\text{см}}$ может возникать в вакууме или диэлектрике, если имеется переменное во времени электрическое поле.

До Максвелла утверждалось, что создавать магнитное поле может только движение зарядов.

2. Поля, в которых циркуляция вектора по замкнутому контуру не равна нулю, т. е., например:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} \neq 0,$$

называются *вихревыми*. У вихревых полей силовые линии замкнуты всегда.

2.2. Второе уравнение Максвелла

Второй закон (уравнение Максвелла) электродинамики описывает процесс возбуждения электрического поля и является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея для произвольной среды.

В 1831 г. Фарадеем было установлено, что в любом проводящем контуре L (рис. 2.4) при изменении во времени сцепленного с ним магнитного потока Φ наводится электродвижущая сила e (ЭДС):

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}, \quad (2.4)$$

где S – поверхность, опирающаяся на контур L ;

$\int_S \vec{B} d\vec{s} = \Phi$ – магнитный поток, Вб.

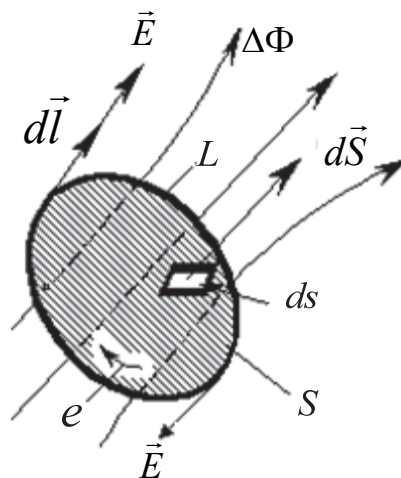


Рис. 2.4. Возникновение ЭДС в проводящем контуре при изменении во времени магнитного потока

Знак « \leftarrow » в правой части формулы (2.4) означает, что возникающая в контуре ЭДС всегда стремится воспрепятствовать изменению магнитного потока Φ , пронизывающего контур L .

Другими словами, возникающая ЭДС порождает в витке ток такого направления, при котором создаваемый этим током вокруг витка вторичный магнитный поток направлен против первичного (внешнего) магнитного потока Φ .

С другой стороны, согласно определению ЭДС e , наводимая в контуре L , равна циркуляции вектора напряженности электрического поля \vec{E} по замкнутому контуру L , т. е.

$$e = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.5)$$

где \vec{E} – вектор напряженности электрического поля на элементе контура $d\vec{l} = \vec{\tau}^\circ dl$.

Из (2.5) следует, что для контуров одинаковой конфигурации, изготовленных из разных материалов, одним и тем же законам изменения магнитного поля соответствуют одинаковые значения ЭДС e , а значение сопротивления проводника роли не играет. Независимость ЭДС от материала проводника контура дала основание Максвеллу предположить, что в опытах Фарадея проводящий контур – лишь индикатор ЭДС, позволяющий обнаружить сам факт существования электрического поля.

Таким образом, объединяя выражение (2.4) и (2.5), получим второй закон электродинамики в интегральной форме

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}. \quad (2.6)$$

Словесная формулировка второго закона такова: циркуляция вектора напряженности электрического поля \vec{E} по любому произвольному замкнутому контуру L в любой среде численно равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока вектора магнитной индукции \vec{B} , пронизывающего поверхность S , опирающуюся на контур L .

Важность второго закона электродинамики (2.6) состоит в том, что согласно ему изменение магнитного поля в диэлектрике непременно порождает в нем электрическое поле.

Физическое содержание второго закона Максвелла

Изменяющееся во времени магнитное поле создает вихревое электрическое поле, т. е. поле, в котором существуют замкнутые электрические силовые линии, связанные правилом левого буравчика с приращением потока вектора магнитной индукции \vec{B} .

Из рассмотренных первого и второго законов вытекает возможность существования ЭМВ в *диэлектрике*, где *отсутствуют* токи и заряды (рис. 2.5).

Пусть каким-то образом создано электрическое поле \vec{E} , изменяющееся во времени, тогда переменное электрическое поле согласно первому закону электродинамики создает переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, создает согласно второму закону Максвелла переменное электрическое поле и т. д. по замкнутому контуру, как показано стрелками на рис. 2.5.

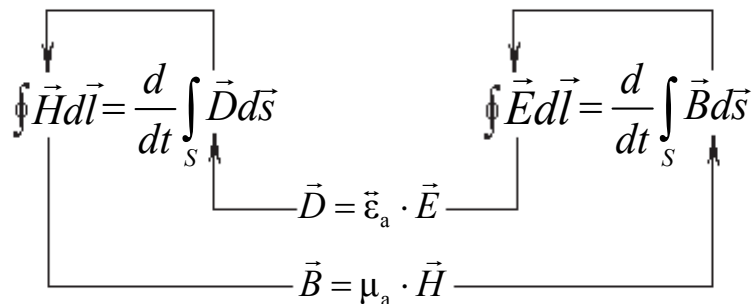


Рис. 2.5. Иллюстрация возможности существования ЭМВ в диэлектрике

Этот самоподдерживающийся процесс поясняет распространение ЭМВ и может существовать только благодаря наличию токов смещения.

2.3. Третье уравнение Максвелла

Третий закон ЭД является обобщением закона Гаусса на случай переменных процессов. Этот закон связывает вектор электрического смещения \vec{D} с распределением заряда q в определенном объеме V (рис. 2.6) и поэтому *описывает закономерность возбуждения электрического поля зарядами*.

Математически третий закон ЭД в интегральной форме записывается в виде

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q = \int_V \rho(x, y, z, t) dv. \quad (2.7)$$

Словесная формулировка третьего закона ЭД такова: поток вектора электрической индукции \vec{D} через произвольную замкнутую поверхность S в определенный момент времени t равен суммарному заряду q , заключенному в объеме V в тот же момент времени, независимо от того, изменяют заряды с течением времени свое положение и величину или нет.

Физическое содержание третьего закона ЭД

Электрический заряд является источником электрического поля. Электрические силовые линии \vec{D} начинаются или заканчиваются на зарядах или в бесконечности.

В зависимости от знака заряда поток вектора \vec{D} может быть положительным, если линии вектора \vec{D} выходят из объема (рис. 2.7, а), и отрицательным, если линии вектора \vec{D} входят в объем (рис. 2.7, б).

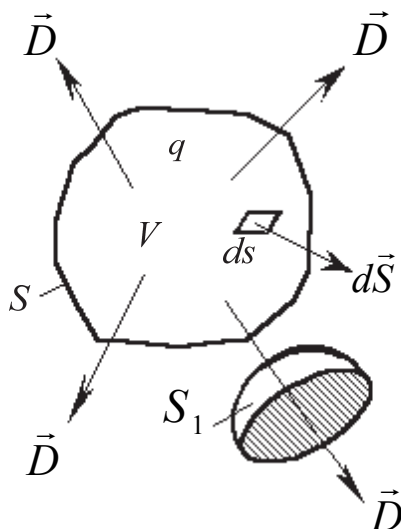


Рис. 2.6. Физическая трактовка третьего закона электродинамики

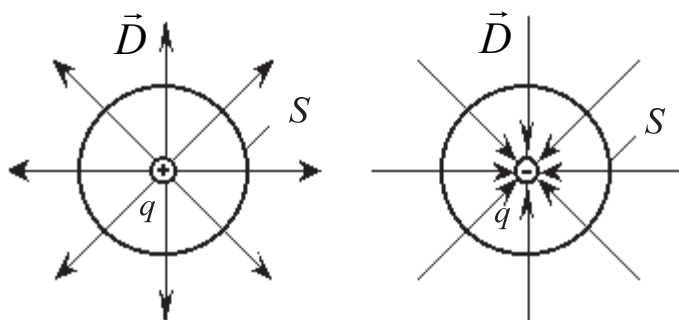


Рис. 2.7. Иллюстрация физического содержания третьего закона электродинамики

Если поверхность S_1 не охватывает заряд (внутри объема, ограниченного поверхностью S_1 , заряда нет) (рис. 2.6) или поле вихревое (число линий поля, входящих в объем V , равно числу линий поля, выходящих из него), то

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = 0. \quad (2.8)$$

2.4. Четвертое уравнение Максвелла

Четвертый закон ЭД занимает среди остальных несколько особое положение, так как является следствием второго закона ЭД, что будет показано ниже.

Такое положение исключает необходимость анализа связи этого закона с опытом и позволяет ограничиться словесной формулировкой.

Поток вектора магнитной индукции \vec{B} через любую замкнутую поверхность S равен нулю в любой момент времени (рис. 2.8):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0. \quad (2.9)$$

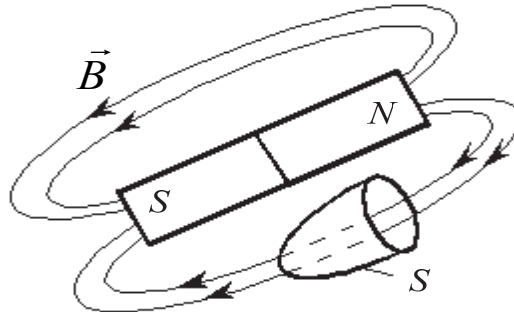


Рис. 2.8. Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность

Включение четвертого закона в основные уравнения ЭД вызвано тем, что он симметрирует систему уравнений, поскольку трактует вопрос об источниках магнитного поля, и в то же время не нарушает ее общности, так как выполняется всегда.

Физическое содержание четвертого закона ЭД

Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты и не имеют ни стоков, ни истоков, т. е. в природе не существует магнитных зарядов.

Примечание: иногда для расчетных целей формально вводят понятие магнитных зарядов и магнитных токов.

Таким образом, рассмотренные законы Максвелла образуют полную систему уравнений (выражения (2.3), (2.6), (2.7) и (2.9)), описывающих поведение векторов ЭМП.

Уравнения ЭД в интегральной форме с точки зрения вычислений малоудобны, поскольку методы решения подобных уравнений разработаны для практических применений недостаточно. Поэтому чаще используют дифференциальную форму записи уравнений Максвелла, с помощью которой удастся найти решения несравненно большего количества задач теории электромагнитного поля.

2.5. Уравнения электродинамики в дифференциальной форме

Переход от уравнений Максвелла в интегральной к дифференциальной форме осуществляется путем применения теорем Стокса и Остроградского-Гаусса в векторной форме:

- теорема Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \vec{A} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dv;$$

- теорема Стокса

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{s}.$$

2.5.1. Первое уравнение Максвелла

Выразим *первый* закон ЭД в дифференциальной форме.

Выберем в электромагнитном поле произвольный замкнутый контур L с поверхностью S , опирающейся на него, и применим к левой части уравнения (2.3) теорему Стокса. При этом получим

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{s} = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{s}.$$

Так как поверхность S взята произвольной, а подынтегральные функции непрерывны, то подынтегральные выражения левой и правой частей должны быть равны, т. е.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{J} + \vec{J}_{\text{см}} = \vec{J}_{\text{полн}}. \quad (2.10)$$

Первое (2.10) уравнение Максвелла в дифференциальной форме устанавливает связь между векторами \vec{H} , \vec{D} и \vec{J} в любой точке пространства.

2.5.2. Второе уравнение Максвелла

Для выражения *второго* закона ЭД в дифференциальной форме также применим к левой части выражения (2.6) теорему Стокса. При этом получим

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s},$$

откуда

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (2.11)$$

Второе (2.11) уравнение Максвелла в дифференциальной форме устанавливает связь между векторами \vec{E} и \vec{B} в любой точке пространства.

2.5.3. Третье и четвертое уравнения Максвелла

Для вывода третьего и четвертого законов ЭД в дифференциальной форме выберем в электромагнитном поле замкнутую поверхность S и, применив теорему Остроградского-Гаусса к третьему (2.7) и четвертому (2.9) уравнениям Максвелла, получим

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q = \int_V \rho dv = \int_V \operatorname{div} \vec{D} dv;$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dv = 0.$$

Так как объем V взят произвольным, а подынтегральные функции непрерывны, то из последних выражений можно получить

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.13)$$

Выражения (2.12) и (2.13) являются математической записью третьего и четвертого законов ЭД в дифференциальной форме.

Уравнения Максвелла содержат огромную информацию об электромагнитном поле. Задача теории заключается в раскрытии важнейших следствий, вытекающих из них, и в применении этих уравнений к отдельным частным задачам практики.

С математической точки зрения уравнения Максвелла представляют собой систему дифференциальных уравнений, куда входят пять векторных и одна скалярная функции: \vec{H} , \vec{B} , \vec{E} , \vec{D} , \vec{J} , ρ . Для их отыскания необходимо располагать шестью независимыми уравнениями. Сами уравнения задают лишь три соотношения (два векторных и одно скалярное), поскольку четвертое уравнение вытекает как следствие из второго. Докажем, что четвертое уравнение Максвелла является следствием второго.

Возьмем операцию div от обеих частей второго уравнения (выражение (2.6)), при этом получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{div} \left(-\frac{d\vec{B}}{dt} \right).$$

Учитывая, что дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0,$$

получаем

$$\operatorname{div} \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{B} = \text{const.}$$

Если поле когда-либо в прошлом отсутствовало, то тогда эта постоянная должна быть равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Что и требовалось доказать.

Следовательно, система уравнений Максвелла оказывается математически неполной. Дополнительные связи между искомыми функциями определяются свойствами среды, в которой существует ЭМП, и будут установлены ниже.

2.5.4. Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности)

Уравнения Максвелла дают полное описание свойств ЭМП. Все законы электромагнетизма, известные из классической физики, обобщены в этих уравнениях или вытекают из них как следствия:

- из первого – уравнение непрерывности;
- из первого и третьего – закон сохранения заряда.

Получим уравнение непрерывности, для чего рассмотрим первое (2.10) уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}.$$

Взяв дивергенцию от обеих частей этого уравнения, получим

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right).$$

Учитывая, что дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю, т. е.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0,$$

получаем

$$\operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = \operatorname{div} \vec{J}_{\text{полн}} = 0. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) является математической записью *уравнения непрерывности* (закона непрерывности полного тока) в дифференциальной форме.

Физический смысл уравнения непрерывности

Линии вектора плотности тока проводимости \vec{J} и вектора плотности тока смещения $\vec{J}_{\text{см}}$ продолжают друг друга, а полный ток образует замкнутую векторную линию.

Для вывода уравнения непрерывности в интегральной форме выберем в электромагнитном поле замкнутую поверхность S и, применив теорему Остроградского-Гаусса к выражению (2.14), получим

$$\oint_S \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{s} = 0. \quad (2.15)$$

Физический смысл уравнения непрерывности в интегральной форме

Полный ток через любую замкнутую поверхность равен нулю. Выходящий из замкнутой поверхности ток равен входящему.

Закон непрерывности полного тока является основой для понимания структуры полей неквазистационарных систем:

- антенн (рис. 2.9);
- волноводов и других устройств.

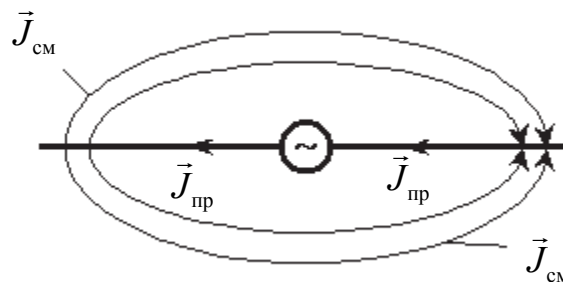


Рис. 2.9. Закон непрерывности полного тока применительно к антенне

Из первого (2.10) и третьего (2.12) уравнений Максвелла в дифференциальной форме вытекает фундаментальный закон природы – закон сохранения заряда. Он относится к основным законам электродинамики.

Из выражения (2.14) следует, что

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\operatorname{div} \frac{d\vec{D}}{dt} = -\frac{d}{dt} \operatorname{div} \vec{D}.$$

Кроме того, согласно третьему уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Объединяя два последних выражения, получим

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}. \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) является математической записью *закона сохранения заряда* в дифференциальной форме.

Проинтегрировав (2.16) по произвольному объему V и применив теорему Остроградского-Гаусса, получим *закон сохранения заряда* в интегральной форме

$$\oint_S \vec{J} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = -\frac{dq}{dt}$$

или

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (2.17)$$

Представим словесную формулировку закона сохранения заряда: полный ток через замкнутую поверхность S определяется скоростью изменения заряда q внутри этой поверхности.

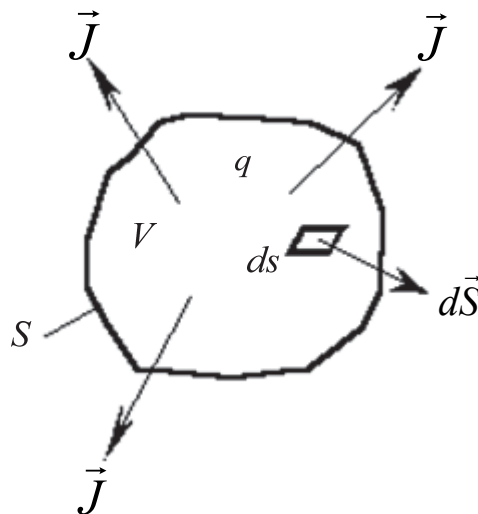


Рис. 2.10. Иллюстрация закона сохранения заряда

Ток $I = \oint_S \vec{J} d\vec{s}$ положителен (т. е. вытекает из объема V), если заряд $q = \int_V \rho dv$ уменьшается (знак минус характеризует убывание заряда) и, наоборот, отрицателен (т. е. втекает в объем), если заряд увеличивается (рис. 2.10).

Физическое содержание закона сохранения заряда

Электрические заряды не возникают и не исчезают. Если из замкнутой поверхности вытекает ток, то количество заряда внутри поверхности уменьшается. Заряд не может переместиться из одной точки в другую, не создав между ними тока. Истоками линий плотности тока \vec{J} являются точки поля, в которых плотность заряда ρ меняется во времени.

2.6. Полная система уравнений электродинамики

Выше были рассмотрены основные уравнения электродинамики. Каждое из них описывает те или иные свойства электромагнитного поля. Анализ электромагнитных процессов возможен только на основе полной системы уравнений электродинамики, приведенной в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Интегральная форма	Дифференциальная форма
*1. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} = i_{пр} + i_{см} = i_{полн}$	1. $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{J} + \vec{J}_{см} = \vec{J}_{полн}$
*2. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}$	2. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$
*3. $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q = \int_V \rho dv$	3. $\text{div } \vec{D} = \rho$
*4. $\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$	4. $\text{div } \vec{B} = 0$
*5. $\oint_S \vec{J} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = -\frac{dq}{dt}$	5. $\text{div } \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$
* $\vec{D} = \epsilon_a \cdot \vec{E};$ * $\vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H};$ * $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$	

На основе анализа уравнений Максвелла относительно свойств электромагнитного поля можно сделать следующие выводы:

- электрическое и магнитное поля тесно связаны между собой, всякое изменение одного из них вызывает изменение другого;
- независимое существование одного электрического поля (без магнитного) возможно только в статическом поле;
- источниками электромагнитного поля являются заряды и токи;
- магнитное поле всегда вихревое, электрическое поле может быть и вихревым и потенциальным. Чисто потенциальным электрическое поле может быть только в статическом случае;
- силовые линии электрического поля могут иметь истоки и стоки. Силовые линии магнитного поля всегда непрерывны.

Уравнения, входящие в полную систему уравнений электродинамики (см. табл. 2.1), являются *линейными* дифференциальными уравнениями.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме справедливы всюду, где электромагнитные параметры среды ϵ_a , μ_a и σ и, следовательно, векторы поля \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} остаются конечными и непрерывными функциями координат. Однако при решении практических задач поле определяется в пространстве, содержащем среды с различными электромагнитными параметрами, например, при определении ЭМП в волноводах и резонаторах. В этом случае внутренняя поверхность стенок волновода (рис. 2.11) разграничивает диэлектрик, для которого можно принять $\sigma = 0$, и металл, обладающий $\sigma \rightarrow \infty$.

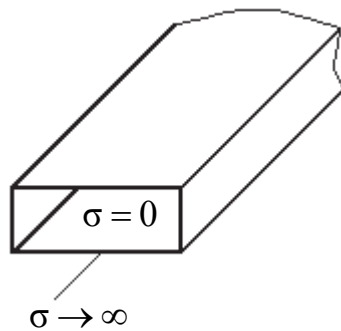


Рис. 2.11. Определение границы раздела двух сред для прямоугольного волновода

Границей раздела двух сред называется граница, при которой один из параметров ϵ , μ или σ изменяет свое значение.

Из анализа уравнений

$$\vec{D} = \epsilon_a \cdot \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}; \quad \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

следует, что граница раздела двух сред является одновременно поверхностью разрыва векторов поля. Таким образом, на поверхности раздела сред дифференциальные уравнения Максвелла теряют смысл, так как здесь производные обращаются в бесконечность.

Следовательно, уравнения Максвелла в дифференциальной форме должны быть *дополнены граничными условиями*, определяющими поведение векторов ЭМП при переходе через границу раздела двух сред.

2.7. Граничные условия для векторов электромагнитного поля

Определение векторов ЭМП при переходе из одной среды в другую будем производить в соответствии с методикой.

1. Представим вектор ЭМП (например, вектор \vec{E}), падающий под любым углом к границе S раздела двух сред, в виде векторной суммы \vec{E}_n нормальной ($\vec{E}_n \perp S$) и \vec{E}_τ тангенциальной ($\vec{E}_\tau \parallel S$) составляющих (рис. 2.12), т. е.

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_\tau = \vec{n}^\circ E_n + \vec{\tau}^\circ E_\tau,$$

где $E_n = \vec{n}^\circ \vec{E} = E \cos \left(\vec{n}^\circ \hat{\vec{E}} \right);$

$$E_\tau = \vec{\tau}^\circ \vec{E} = E \cos \left(\vec{\tau}^\circ \hat{\vec{E}} \right).$$

2. Рассмотрим отдельно поведение каждой из составляющих векторов поля на границе раздела, т. е. определим величину нормальной и тангенциальной составляющих во второй среде.

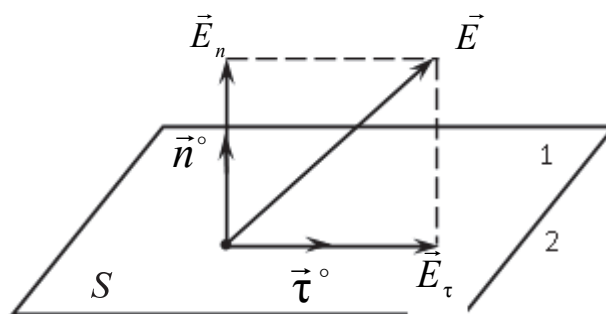


Рис. 2.12. Представление вектора ЭМП в виде векторной суммы нормальной и тангенциальной составляющих

3. Искомый вектор ЭМП во второй среде определим как векторную сумму составляющих.

Для изучения поведения векторов ЭМП при переходе из одной среды в другую будем исходить из уравнений Максвелла в интегральной форме (табл. 2.1), которые остаются справедливыми и в этих случаях.

2.7.1. Граничные условия для нормальных составляющих векторов поля

Выделим на поверхности S раздела двух (1 и 2) изотропных сред, характеризуемых параметрами ϵ_{a1} , μ_{a1} , σ_{a1} и ϵ_{a2} , μ_{a2} , σ_{a2} соответственно, достаточно малый элемент Δs так, чтобы

- во-первых, его можно было считать плоским;
- во-вторых, чтобы в его пределах векторы $\vec{D}_1(\vec{B}_1)$ и $\vec{D}_2(\vec{B}_2)$ можно было считать постоянными (поле однородно).

Построим на элементе Δs цилиндр (рис. 2.13) высотой Δh так, чтобы его основания находились в разных средах. Поверхность и объем этого цилиндра настолько малы, что поле в его пределах можно считать постоянным (однородным).

Будем считать, что электрический заряд q распределен только на поверхности S с поверхностной плотностью ρ_s .

Получим граничные условия для нормальной составляющей вектора \vec{D} , для чего применим к цилиндрической замкнутой поверхности третий закон электродинамики в интегральной форме (2.7)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q = \int_V \rho(x, y, z, t) dv,$$

где S – поверхность цилиндра,

V – объем цилиндра.

Поверхность цилиндра S можно представить в виде суммы

$$S = \Delta s_1 + \Delta s_2 + S_{бок1} + S_{бок2},$$

где Δs_1 и Δs_2 – площади верхнего и нижнего оснований цилиндра соответственно;

$S_{бок1}$ и $S_{бок2}$ – площади боковых поверхностей, находящихся в 1 и 2 средах соответственно.

Тогда третий закон электродинамики приобретает следующий вид:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_{\Delta s_1} \vec{D}_1 d\vec{s}_1 + \int_{S_{бок1}} \vec{D}_1 d\vec{s}_1 + \int_{\Delta s_2} \vec{D}_2 d\vec{s}_2 + \int_{S_{бок2}} \vec{D}_2 d\vec{s}_2 = \int_V \rho dv = q. \quad (2.18)$$

Будем сжимать цилиндр, приближая верхнее и нижнее основания к границе раздела сред, т. е.

$$\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta s_1 \text{ и } \Delta s_2 \rightarrow \Delta s \Rightarrow \vec{n}_1^\circ \rightarrow \vec{n}^\circ \text{ и } \vec{n}_2^\circ \rightarrow -\vec{n}^\circ. \quad (2.19)$$

В связи с условием (2.19) боковая поверхность цилиндра стремится к нулю, т. е.

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{бок1}} + S_{\text{бок2}} \rightarrow 0,$$

поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{бок1}}} \vec{D}_1 d\vec{s}_1 = 0 \text{ и } \lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_{\text{бок2}}} \vec{D}_2 d\vec{s}_2 = 0, \quad (2.20)$$

а заряд q в объеме V будет определяться зарядом на поверхности S раздела двух сред, т. е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho dv = \int_{\Delta s} \rho_s ds. \quad (2.21)$$

С учетом того, что

$$d\vec{s}_1 = \vec{n}^\circ ds \text{ и } d\vec{s}_2 = -\vec{n}^\circ ds,$$

левую часть уравнения (2.18) преобразуем к виду

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_{\Delta s} \vec{D}_1 \vec{n}^\circ ds - \int_{\Delta s} \vec{D}_2 \vec{n}^\circ ds. \quad (2.22)$$

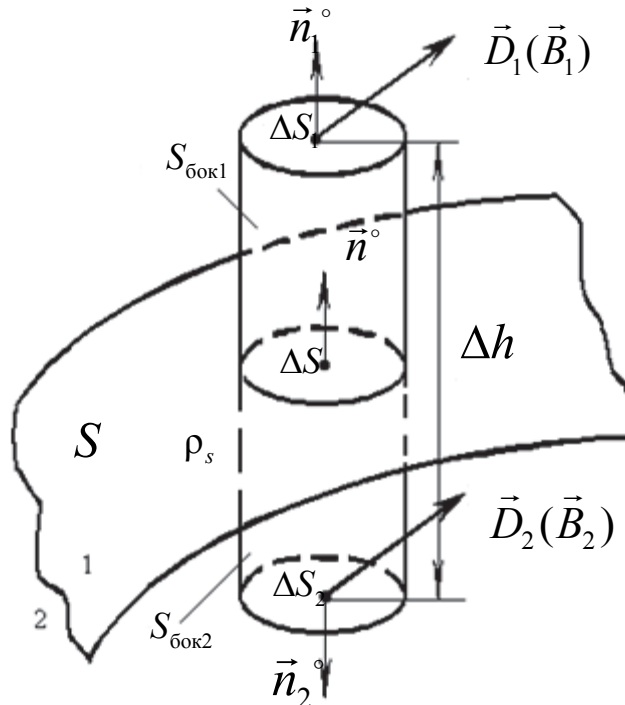


Рис. 2.13. Определение граничных условий для нормальной составляющей вектора \vec{D} на примере цилиндрической замкнутой поверхности

Подставляя соотношения (2.20)–(2.22) в уравнение (2.18) и учитывая, что

$$\vec{D}_1 \vec{n}^\circ = D_{n1} \text{ и } \vec{D}_2 \vec{n}^\circ = D_{n2},$$

получаем

$$\int_{\Delta s} \vec{D}_1 \vec{n}^\circ ds - \int_{\Delta s} \vec{D}_2 \vec{n}^\circ ds = \int_{\Delta s} (D_{n1} - D_{n2}) ds = \int_{\Delta s} \rho_s ds.$$

Так как поверхность Δs выбрана произвольно, то окончательно получим

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n}^\circ = \rho \text{ или } D_{n1} - D_{n2} = \rho_{ss}. \quad (2.23)$$

Выражение (2.23) является *граничным условием* для нормальных составляющих вектора \vec{D} в векторной и скалярной формах записи соответственно.

Из анализа уравнений (2.23) следуют выводы:

1. При переходе заряженной границы раздела двух сред нормальная составляющая вектора \vec{D} претерпевает скачок, равный поверхностной плотности зарядов ρ_s .

Поясним графически скачок вектора \vec{D} в случае наличия на границе раздела сред поверхностного заряда.

Выберем на поверхности раздела сред такую малую площадку S , чтобы ее можно было считать плоской, а заряд q – распределенным равномерно с поверхностной плотностью ρ_s . Из курса физики известно, что поле такой площадки имеет вид, представленный на рис. 2.14. Тогда при наличии внешнего поля с одной стороны поверхности раздела произойдет сложение внешнего поля и поля поверхностного заряда, а с другой – их вычитание (рис. 2.14).

2. При отсутствии ($\rho_s = 0$) поверхностного заряда нормальная составляющая вектора \vec{D} непрерывна, т. е.

$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (2.24)$$

3. Выражая в соотношении (2.24) D_{n1} и D_{n2} через E_{n1} и E_{n2} с помощью материального уравнения $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$, получим граничные условия для нормальных составляющих вектора \vec{E}

$$\epsilon_{a1} E_{n1} - \epsilon_{a2} E_{n2} = \rho_s \quad (2.25)$$

или при отсутствии ($\rho_s = 0$) поверхностного заряда

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}}, \quad (2.26)$$

т. е. нормальная составляющая вектора \vec{E} при переходе через границу раздела сред претерпевает скачок, обратно пропорциональный отношению диэлектрических проницаемостей сред в рассматриваемой точке.

Из анализа (2.25) можно сделать вывод, что наличие поверхностной плотности зарядов ρ_s в рассматриваемой точке пространства приводит к изменению величины скачка, увеличивая или уменьшая его. При определенном значении ρ_s нормальная составляющая вектора \vec{E} может оказаться непрерывной.

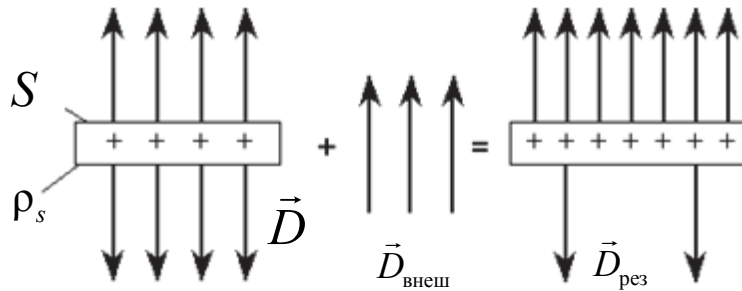


Рис. 2.14. Графическая иллюстрация возникновения скачка вектора \vec{D} в случае наличия на границе раздела сред поверхностного заряда

Получим граничные условия для нормальной составляющей вектора \vec{B} , для чего воспользуемся четвертым (2.9) законом электродинамики в интегральной форме и запишем его применительно к цилиндрической замкнутой поверхности S (рис. 2.13):

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = \int_{\Delta s_1} \vec{B}_1 d\vec{s}_1 + \int_{S_{бок1}} \vec{B}_1 d\vec{s}_1 + \int_{\Delta s_2} \vec{B}_2 d\vec{s}_2 + \int_{S_{бок2}} \vec{B}_2 d\vec{s}_2 = 0.$$

Сжимая цилиндр (приближая верхнее и нижнее основания к границе раздела сред), с учетом условий (2.19) и

$$\vec{B}_1 \vec{n}^\circ = B_{n1} \text{ и } \vec{B}_2 \vec{n}^\circ = B_{n2}$$

получим

$$\int_{\Delta s} \vec{B}_1 \vec{n}^\circ ds - \int_{\Delta s} \vec{B}_2 \vec{n}^\circ ds = \int_{\Delta s} (B_{n1} - B_{n2}) ds = 0.$$

Так как поверхность Δs выбрана произвольно, то окончательно получим

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{n}^\circ = 0 \text{ или } B_{n1} - B_{n2} = 0. \quad (2.27)$$

Выражение (2.27) является *граничным условием* для нормальных составляющих вектора \vec{B} в векторной и скалярной формах записи соответственно.

Из анализа уравнений (2.27) следуют выводы:

1. При переходе границы раздела двух сред нормальная составляющая вектора \vec{B} всегда непрерывна, т. е. не изменяет своей величины.

2. Выражая в соотношении (2.27) B_{n1} и B_{n2} через H_{n1} и H_{n2} с помощью материального уравнения $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, получим граничные условия для нормальных составляющих вектора \vec{H} :

$$\mu_{a1} H_{n1} - \mu_{a2} H_{n2} = 0$$

или

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}, \quad (2.28)$$

т. е. нормальная составляющая вектора \vec{H} при переходе через границу раздела сред претерпевает скачок, обратно пропорциональный отношению магнитных проницаемостей сред в рассматриваемой точке.

2.7.2. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов поля

Пусть поверхность S является границей раздела двух изотропных сред, характеризуемых параметрами ϵ_{a1} , μ_{a1} , σ_{a1} и ϵ_{a2} , μ_{a2} , σ_{a2} соответственно. Из произвольной точки на поверхности S проведем из второй среды в первую единичную нормаль \vec{n}° (рис. 2.15). Через \vec{n}° проведем плоскость P . На линии пересечения поверхности раздела и плоскости P выделим достаточно малый отрезок Δl так, чтобы выбранная точка находилась внутри этого отрезка. В плоскости P на отрезке Δl построим прямоугольный контур $ABCD$ высоты Δh так, чтобы он находился в обеих средах. Размер прямоугольника $ABCD$ выбран настолько малым, что поле в его пределах можно считать постоянным (однородным). Проведем, кроме того, единичную касательную $\vec{\tau}^\circ$ к отрезку Δl и единичную нормаль \vec{N}° к плоскости P . Векторы \vec{n}° , $\vec{\tau}^\circ$ и \vec{N}° образуют правую тройку векторов и удовлетворяют соотношению

$$\vec{\tau}^\circ = [\vec{N}^\circ, \vec{n}^\circ].$$

Получим граничные условия для тангенциальных составляющих вектора \vec{E} , для чего применим к контуру $ABCD$ второе (2.6) уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{s}, \quad (2.29)$$

где $S = \Delta h \cdot \Delta l$ – площадь, охватываемая контуром $ABCD$.

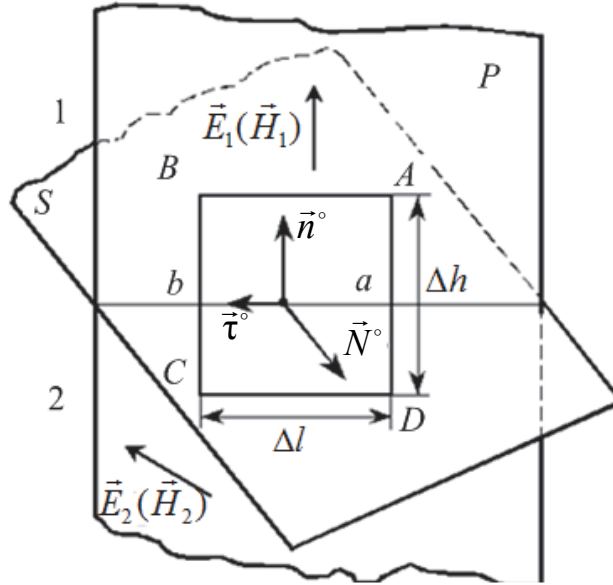


Рис. 2.15. Определение граничных условий для двух изотропных сред

Левую часть уравнения (2.29) можно представить в виде

$$\int_{AB} \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \int_{B\bar{b}} \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \int_{\bar{b}C} \vec{E}_2 d\vec{l}_2 + \int_{CD} \vec{E}_2 d\vec{l}_2 + \int_{Da} \vec{E}_2 d\vec{l}_2 + \int_{aA} \vec{E}_1 d\vec{l}_1 = - \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{s}. \quad (2.30)$$

Устремим высоту Δh контура $ABCD$ к нулю так, чтобы стороны AB и CD оставались в разных средах и в пределе совпадали с Δl , т. е.

$$\Delta h \rightarrow 0 \Rightarrow AB \text{ и } CD \rightarrow \Delta l; B\bar{b}, \bar{b}C, Da \text{ и } aA \rightarrow 0; S \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

В связи с условием (2.31) второй, третий, пятый, шестой и седьмой интегралы в выражении (2.30) будут равны нулю, т. к. подынтегральные выражения конечны, а пределы интегрирования стремятся к нулю.

Тогда уравнение (2.30) можно представить в виде

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{AB} \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{CD} \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = \int_{\Delta l} \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \int_{\Delta l} \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = 0.$$

С учетом того, что

$$d\vec{l}_1 = \vec{\tau}^\circ dl \text{ и } d\vec{l}_2 = -\vec{\tau}^\circ dl,$$

$$\vec{E}_1 \vec{\tau}^\circ = E_{\tau 1} \text{ и } \vec{E}_2 \vec{\tau}^\circ = E_{\tau 2},$$

получаем

$$\int_{\Delta l} \vec{E}_1 \vec{\tau}^\circ dl - \int_{\Delta l} \vec{E}_2 \vec{\tau}^\circ dl = \int_{\Delta l} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}^\circ dl = \int_{\Delta l} (E_{\tau 1} - E_{\tau 2}) dl = 0.$$

Так как участок Δl выбран произвольно, то окончательно получим

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}^\circ = 0 \text{ или } E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0. \quad (2.32)$$

Выражение (2.32) является *граничным условием* для *тангенциальных* составляющих вектора \vec{E} в векторной и скалярной формах записи соответственно.

Из анализа уравнений (2.32) следуют выводы:

1. При переходе границы раздела двух сред тангенциальная составляющая вектора \vec{E} всегда непрерывна, т.е. не изменяет своей величины

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (2.33)$$

2. Выражая в соотношении (2.33) $E_{\tau 1}$ и $E_{\tau 2}$ через $D_{\tau 1}$ и $D_{\tau 2}$ с помощью материального уравнения $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$, получим граничные условия для нормальных составляющих вектора \vec{D} :

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}, \quad (2.34)$$

т. е. тангенциальная составляющая вектора \vec{D} при переходе через границу раздела двух сред претерпевает скачок на величину, прямо пропорциональную отношению диэлектрических проницаемостей сред в рассматриваемой точке.

Более унифицированной является запись граничного условия для вектора \vec{E} в векторной форме. Учитывая, что $\vec{\tau}^\circ = [\vec{N}^\circ, \vec{n}^\circ]$, из выражения (2.32) следует

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) [\vec{N}^\circ, \vec{n}^\circ] = \vec{N}^\circ [\vec{n}^\circ, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] = 0.$$

Известно, что произведение равно нулю, если один из его множителей равен нулю. Так как $\vec{N}^\circ \neq 0$ и \vec{N}° в общем случае не перпендикулярен вектору $[\vec{n}^\circ, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)]$ (поскольку положение контура $ABCD$ выбрано произвольно), то следует принять, что

$$[\vec{n}^\circ, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] = 0.$$

Рассмотрим векторное произведение

$$[\vec{n}^\circ, (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)] = |\vec{n}^\circ| \cdot |(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)| \cdot \sin \left[\vec{n}^\circ, \widehat{(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)} \right] = 0.$$

В последнем выражении $|\vec{n}^\circ| \neq 0$ и $|\vec{E}_1 - \vec{E}_2| \neq 0$ (иначе векторы были бы всегда равны в любых средах), значит,

$$\sin \left[\vec{n}^\circ, \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right] = 0.$$

Откуда следует, что векторы \vec{n}° и $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$ коллинеарны. А это будет наблюдаться только в том случае, если тангенциальные составляющие вектора \vec{E} в первой и второй средах равны между собой (рис. 2.16): a – векторы \vec{n}° и $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$ коллинеарны, b – векторы \vec{n}° и $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)$ не коллинеарны.

Из рис. 2.16 следует также, что нормальные составляющие вектора \vec{E} при переходе через границу раздела двух сред не равны между собой, что подтверждает справедливость полученного в п. 2.7.1 выражения (2.26).

Получим граничные условия для тангенциальных составляющих вектора \vec{H} , для чего применим к контуру $ABCD$ (рис. 2.15) первое (2.3) уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{s}. \quad (2.35)$$

Левую часть уравнения (2.35) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \int_{B\bar{b}} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \int_{\bar{b}C} \vec{H}_2 d\vec{l}_2 + \int_{CD} \vec{H}_2 d\vec{l}_2 + \int_{Da} \vec{H}_2 d\vec{l}_2 + \int_{aA} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 = \\ = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{s}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Устремим высоту Δh контура $ABCD$ к нулю и, учитывая условие (2.31), преобразуем левую часть (2.36) к следующему виду:

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{AB} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{CD} \vec{H}_2 d\vec{l}_2 = \int_{\Delta l} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \int_{\Delta l} \vec{H}_2 d\vec{l}_2,$$

а с учетом того, что

$$d\vec{l}_1 = \vec{\tau}^\circ dl \text{ и } d\vec{l}_2 = -\vec{\tau}^\circ dl,$$

получим

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{AB} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{CD} \vec{H}_2 d\vec{l}_2 = \int_{\Delta l} \vec{H}_1 d\vec{l}_1 + \int_{\Delta l} \vec{H}_2 d\vec{l}_2. \quad (2.37)$$

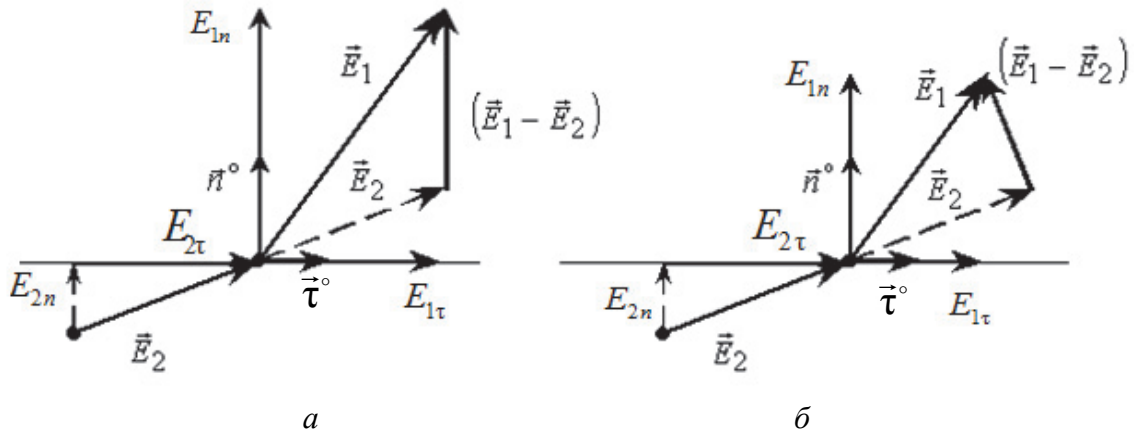


Рис. 2.16. Вид нормальных составляющих вектора \vec{E} при переходе через границу раздела двух сред

Рассмотрим правую часть (2.36) при $\Delta h \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_S \vec{J} d\vec{s} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta h \cdot \Delta l} \vec{J} \vec{N}^\circ ds = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_{\Delta h \cdot \Delta l} \vec{J} \vec{N}^\circ dh dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_s \vec{N}^\circ dl,$$

где $\vec{J}_s = \vec{J} dh$ – вектор плотности поверхностного тока проводимости (см. п. 1.2);

$$\lim_{S \rightarrow 0} \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{s} = 0, \text{ так как } \frac{d\vec{D}}{dt} \text{ – конечная величина.}$$

Таким образом, уравнение (2.36) преобразуется к виду

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \oint_{ABCD} \vec{H} d\vec{l} = \int_{\Delta l} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \vec{\tau}^\circ dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_s \vec{N}^\circ dl.$$

Поскольку участок Δl выбран произвольно и учитывая, что

$$\vec{H}_1 \vec{\tau}^\circ = H_{\tau 1}; \quad \vec{H}_2 \vec{\tau}^\circ = H_{\tau 2} \text{ и } J_{sN} = \vec{J}_s \vec{N}^\circ,$$

окончательно получим

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \vec{\tau}^\circ = \vec{J}_s \vec{N}^\circ \text{ или } H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = J_{sN}, \quad (2.38)$$

где $J_{sN} = \vec{J}_s \vec{N}^\circ$ – нормальная составляющая вектора плотности поверхностного тока проводимости.

Выражение (2.38) является *граничным условием для тангенциальных составляющих вектора \vec{H}* в векторной и скалярной формах записи соответственно.

Из анализа уравнений (2.38) следуют выводы:

1. Тангенциальная составляющая вектора \vec{H} при переходе через границу раздела сред претерпевает разрыв на величину нормальной составляющей вектора плотности \vec{J}_s поверхностного тока проводимости в рассматриваемой точке рассматриваемой точке.

На рис. 2.17 приведено графическое пояснение скачка тангенциальной составляющей вектора \vec{H} при наличии поверхностного тока.

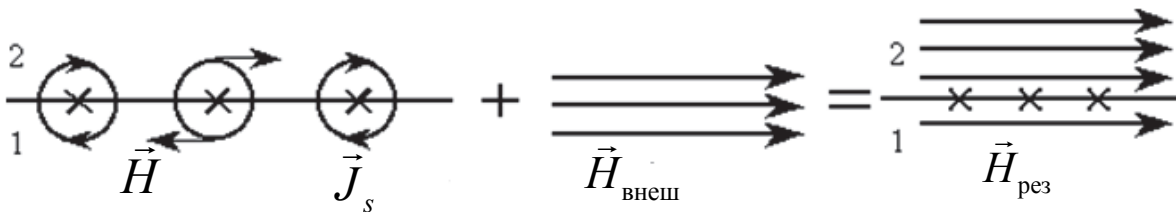


Рис. 2.17. Графическое пояснение скачка тангенциальной составляющей вектора \vec{H} при наличии поверхностного тока

2. При отсутствии ($\vec{J}_s = 0$) на поверхности раздела тока проводимости⁴ тангенциальная составляющая вектора \vec{H} непрерывна, т. е. не изменяется

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (2.39)$$

3. Выражая в соотношении (2.39) $H_{\tau 1}$ и $H_{\tau 2}$ через $B_{\tau 1}$ и $B_{\tau 2}$ с помощью материального уравнения $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$, получим граничные условия для тангенциальных составляющих вектора \vec{B}

$$\frac{B_{\tau 1}}{B_{\tau 2}} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}, \quad (2.40)$$

т. е. тангенциальная составляющая вектора \vec{B} при переходе через границу раздела сред претерпевает скачок, прямо пропорциональный отношению магнитных проницаемостей сред в рассматриваемой точке.

2.7.3. Полная система граничных условий. Граничные условия на границе с идеальным проводником

В пп. 2.7.1 и 2.7.2 были получены следующие граничные условия, которые должны выполняться на границе раздела двух сред:

⁴ Этот случай характерен для границы раздела, образованной двумя различными диэлектриками.

$$\left. \begin{aligned} D_{n1} - D_{n2} &= \rho_S; \\ E_{\tau1} &= E_{\tau2}; \\ B_{n1} &= B_{n2}; \\ H_{\tau1} - H_{\tau2} &= J_{sN^0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Уравнения (2.41) составляют полную систему граничных условий. Они справедливы для любых электромагнитных процессов в макроскопической электродинамике. Невключение в систему (2.41) граничных условий для составляющих D_τ , E_n , B_τ и H_n , объясняется тем, что эти составляющие являются следствием соотношений (2.41) с учетом уравнений среды (1.2) и (1.3).

При практических расчетах полей часто встречается граница раздела «реальный металл – воздух» (например, расчет поля ЭМВ в прямоугольном или круглом волноводе), которая идеализируется при инженерных расчетах к границе раздела «идеальный металл – воздух».

Рассмотрим особо этот случай. Будем считать первую среду диэлектриком, а вторую – идеальным проводником ($\sigma_2 = \infty$). При этом в идеальном проводнике ЭМП отсутствует. Докажем это:

- $\vec{E}_2 = 0$, так как в противном случае в соответствии с законом Ома ($\vec{J} = \sigma \vec{E}$) во второй среде должен иметь место ток бесконечно большого значения, что противоречит физическому смыслу.

- Полагая во втором (2.6) уравнении Максвелла $\vec{E}_2 = 0$, получаем $\frac{d\vec{B}_2}{dt} = 0$. Поскольку поле считается переменным, то последнее равенство выполняется только при $\vec{B}_2 = 0$, а с учетом уравнения среды (1.3) получим, что $\vec{H}_2 = 0$.

Таким образом, для идеально проводящей среды

$$\vec{E}_2 = \vec{B}_2 = \vec{D}_2 = \vec{H}_2 = 0,$$

следовательно, полная система граничных условий (2.41) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} D_{n1} &= \rho_s; \\ E_{\tau1} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{n1} &= 0; \\ H_{\tau1} &= J_{sN^0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Из уравнений (2.42) следует, что *нормальная* составляющая вектора электрического поля \vec{D}_1 на поверхности идеального проводника равна плотности поверхностного заряда ρ_s , а *тангенциальная* составляющая вектора \vec{E}_1 равна нулю. Это означает, что *силовые линии электрического поля на границе с идеальным проводником располагаются только перпендикулярно к плоскости проводника* (рис. 2.18).

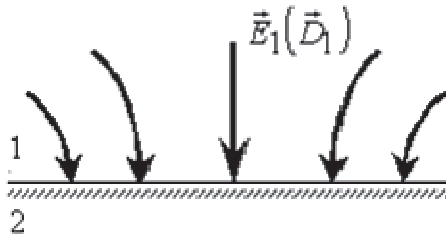


Рис. 2.18. Силовые линии электрического поля на границе с идеальным проводником

Из уравнений (2.43) следует, что *тангенциальная* составляющая вектора напряженности магнитного поля \vec{H}_1 на поверхности идеального проводника равна нормальной составляющей вектора плотности поверхностного тока проводимости \vec{J}_s , а *нормальная* составляющая вектора \vec{B}_1 равна нулю. Это означает, что *силовые линии магнитного поля на границе с идеальным проводником располагаются только параллельно поверхности проводника* (рис. 2.19).



Рис. 2.19. Силовые линии магнитного поля на границе с идеальным проводником

Следует заметить, что понятие «идеальный проводник» является абстрактным. Поэтому на границе с *реальным* проводником ($\sigma_2 \neq \infty$) будет иметь место некоторой величины *тангенциальная* составляющая вектора $\vec{E}_1(\vec{D}_1)$ *электрического* поля и *нормальная* составляющая вектора $\vec{H}_1(\vec{B}_1)$ *магнитного* поля. Однако из-за их малости во многих практических задачах электродинамики этими составляющими пренебрегают.

Таким образом, полная система (2.41) граничных условий совместно с полной системой уравнений электродинамики, приведенной в табл. 2.1, являются основными уравнениями ЭМП.

2.8. Метод комплексных амплитуд при анализе гармонических полей

2.8.1. Гармонические поля. Комплексные векторы поля

Рассмотренные уравнения ЭМП справедливы при изменении во времени сторонних сил по произвольному закону. Однако:

- на практике в большинстве случаев приходится иметь дело с электромагнитными полями, создаваемыми изменяющимися по гармоническому закону токами и зарядами;
- реальные негармонические электромагнитные процессы на основе ряда или интеграла Фурье можно представить в виде суммы дискретных гармонических колебаний.

Следовательно, можно ограничиться изучением только гармонических⁵ ЭМП.

Анализ гармонических полей существенно упрощается при использовании метода комплексных амплитуд (символического метода), широко используемого в теории цепей переменного тока.

Рассмотрим особенности применения данного метода для векторных величин.

Векторная гармоническая функция описывается выражением

$$\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_m \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.44)$$

где $\vec{\Psi}$ – мгновенное значение любого из векторов ЭМП (\vec{D} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} и \vec{J});
 $\vec{\Psi}_m$ – амплитудное значение вектора;

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота гармонических колебаний;

φ – начальная фаза колебаний.

Подобным равенством описываются и *скалярные* функции, изменяющиеся по гармоническому закону.

В основу перехода от реальных физических величин к их символической записи, как известно, положена формула Эйлера

$$e^{\pm j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) \pm j \sin(\omega t + \varphi).$$

Тогда гармоническую функцию (2.44) можно определять как *вещественную часть комплексной функции*

$$\dot{\vec{\Psi}} = \vec{\Psi}_m \cdot e^{\pm j(\omega t + \varphi)} = \dot{\vec{\Psi}}_m \cdot e^{\pm j\omega t}, \quad (2.45)$$

⁵ Если ЭМП изменяется по гармоническому (sin или cos) закону, то такое поле называется *гармоническим* (монохроматическим).

где $\dot{\vec{\Psi}}$ – комплексный вектор поля;

$\dot{\vec{\Psi}} = \dot{\vec{\Psi}}_m \cdot e^{\pm j\omega t}$ – комплексная амплитуда вектора поля;

$e^{j\omega t}$ – временной множитель.

Выражение (2.45) может быть представлено в виде

$$\dot{\vec{\Psi}} = \vec{\Psi}_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \pm j \vec{\Psi}_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \dot{\vec{\Psi}} \pm j \operatorname{Im} \dot{\vec{\Psi}},$$

где Re – знак операции извлечения вещественной части комплексного числа;

Im – знак операции извлечения мнимой части комплексного числа.

Тогда

$$\vec{\Psi} = \operatorname{Re} \dot{\vec{\Psi}} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{\vec{\Psi}}_m e^{j\omega t} \right\} = \vec{\Psi}_m \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Отметим, что комплексная амплитуда $\dot{\vec{\Psi}}_m$ в выражении (2.45) также может быть представлена через свою вещественную и мнимую части

$$\dot{\vec{\Psi}}_m = \vec{\Psi}_m e^{\pm j\varphi} = \vec{\Psi}_m \cos \varphi \pm j \vec{\Psi}_m \sin \varphi = \operatorname{Re} \dot{\vec{\Psi}}_m \pm j \operatorname{Im} \dot{\vec{\Psi}}_m.$$

Необходимо подчеркнуть, что как действительная векторная функция $\vec{\Psi}$, так и комплексная векторная функция $\dot{\vec{\Psi}}$ определяют истинное положение вектора в трехмерном пространстве и являются реальной характеристикой его ориентации. Выясним, какой вид принимают основные уравнения ЭМП в комплексной форме.

2.8.2. Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд

Как было показано выше, для гармонических полей можно записать

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t} \right); \quad \vec{B} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{B}}_m e^{j\omega t} \right); \quad \vec{D} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{D}}_m e^{j\omega t} \right);$$

$$\vec{H} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t} \right); \quad \vec{J} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{J}}_m e^{j\omega t} \right).$$

С учетом этих выражений первое уравнение (2.10) Максвелла в дифференциальной⁶ форме принимает следующий вид:

$$\operatorname{rot} \left(\operatorname{Re} \left(\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t} \right) \right) = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{J}}_m e^{j\omega t} \right) + \frac{d}{dt} \left(\operatorname{Re} \left(\dot{\vec{D}}_m e^{j\omega t} \right) \right).$$

⁶ Метод комплексных амплитуд применим также и к уравнениям ЭМП в интегральной форме записи.

В силу линейности уравнений Максвелла (см. п. 2.6) и линейности операции Re имеем:

$$\text{Re}\left(\text{rot}\left(\dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}\right)\right) = \text{Re}\left(\dot{\vec{J}}_m e^{j\omega t} + \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{D}}_m e^{j\omega t}\right)\right).$$

Опустив оператор Re , получим первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме для комплексных гармонических векторов ЭМП.

Далее вычислим производные комплексной величины по времени⁷ и, сокращая на временной множитель $e^{j\omega t}$, получим первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме для *комплексных амплитуд* гармонических векторов ЭМП:

$$\text{rot}\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{J}}_m + j\omega\dot{\vec{D}}_m.$$

Выполнив аналогичные преобразования в остальных уравнениях, получим основные уравнения электродинамики в *комплексной* форме записи. Полная система уравнений электродинамики в дифференциальной форме для *комплексных амплитуд* гармонических векторов ЭМП приведена в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Основные уравнения	Дополнительные уравнения
$\text{rot}\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{J}}_m + j\omega\dot{\vec{D}}_m.$ (2.46)	$\text{div}\dot{\vec{J}}_m = -j\omega\dot{\rho}_m;$ (2.50)
$\text{rot}\dot{\vec{E}}_m = -j\omega\dot{\vec{B}}_m;$ (2.47)	$\dot{\vec{D}}_m = \epsilon_a\dot{\vec{E}}_m;$ (2.51)
$\text{div}\dot{\vec{D}}_m = \dot{\rho}_m;$ (2.48)	$\dot{\vec{B}}_m = \mu_a\dot{\vec{H}}_m;$ (2.52)
$\text{div}\dot{\vec{B}}_m = 0.$ (2.49)	$\dot{\vec{J}}_m = \sigma\dot{\vec{E}}_m$ (2.53)

Сравнивая табл. 2.1 и 2.2, можно сделать следующий вывод: *дифференциальные уравнения для комплексных амплитуд гармонических векторов ЭМП проще уравнений в вещественной форме записи (табл. 2.1), так как они содержат только производные по координатам, а исходные уравнения – еще и производные по времени.*

Таким образом, применение метода комплексных амплитуд для линейных уравнений сводится к формальной замене реальных векторов поля (\vec{D} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} и \vec{J}) их комплексными амплитудами (\vec{D}_m , \vec{E}_m , \vec{B}_m , \vec{H}_m и \vec{J}_m) и замене операции дифференцирования по времени умножением на $j\omega$, т. е.

⁷ Дифференцирование комплексной величины по времени эквивалентно ее умножению на $j\omega$, т. к. $\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}$.

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega.$$

В случае нелинейных уравнений действительная векторная функция $\bar{\Psi}$ определяется как полусумма комплексно сопряженных функций, т. е.

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2}(\dot{\Psi} + \dot{\Psi}^*),$$

где $\dot{\Psi}^* = \dot{\Psi}_m e^{-j(\omega t + \varphi)}$ – функция, комплексно сопряженная функции $\dot{\Psi}$.

Применим метод комплексных амплитуд к выражению (2.2) плотности тока смещения $J_{\text{см}}$:

$$\dot{J}_{\text{см}} = \frac{d\dot{D}}{dt}.$$

Тогда с учетом материального уравнения (2.51) получим

$$\dot{J}_{m \text{ см}} e^{j\omega t} = j\omega \dot{D}_m e^{j\omega t} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_m e^{j\omega t}.$$

Поскольку

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}},$$

то

$$\dot{J}_{m \text{ см}} e^{j\omega t} = \omega \dot{D}_m e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega \epsilon_a \dot{E}_m e^{j\omega\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)} = \omega \epsilon_a \dot{E}_m e^{j\omega\left(t + \frac{\pi T}{2 \cdot 2\pi}\right)}.$$

Откуда

$$\dot{J}_{m \text{ см}} e^{j\omega t} = \omega \epsilon_a \dot{E}_m e^{j\omega\left(t + \frac{T}{4}\right)}. \quad (2.54)$$

Из анализа уравнения (2.54) следует:

1. Для гармонических полей закон распределения силовых линий тока смещения $\vec{J}_{\text{см}}$ в пространстве *совпадает* с законом распределения силовых линий электрического поля \vec{E} , так как

$$\dot{J} \sim \dot{E}.$$

2. Ток смещения $\vec{J}_{\text{см}}$ опережает электрическое поле \vec{E} на четверть периода.

Полученная взаимосвязь между законами распределения силовых линий в пространстве тока смещения и электрического поля позволит в дальнейшем (при изучении линий передачи электромагнитной энергии диапазона СВЧ) изображать структуру ЭМП, распространяющегося в волноводе.

2.8.3. Понятие о комплексных проницаемостях

Рассмотрим первое (2.46) уравнение Максвелла в дифференциальной форме для *комплексных амплитуд* гармонических векторов ЭМП с учетом закона Ома (2.53) и материального уравнения (2.51):

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \sigma \dot{\vec{E}}_m + j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m = j\omega \left(\epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\vec{E}}_m = j\omega \dot{\epsilon}_a \dot{\vec{E}}_m,$$

где

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (2.55)$$

– комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. Ее значение зависит от частоты, т. е. $\dot{\epsilon}_a = f(\omega)$.

Комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость $\dot{\epsilon}_a$ имеет место в *проводящих средах* ($\vec{J}_m \neq 0$, $\sigma \neq 0$).

Вещественная часть выражения (2.55)

$$\epsilon' = \epsilon_a$$

характеризует *диэлектрические свойства* среды, а мнимая часть

$$\epsilon'' = \sigma/\omega$$

определяет *тепловые потери* электромагнитной энергии в проводящей среде.

Отношение

$$\frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} = \frac{\sigma \left| \dot{\vec{E}}_m \right|}{\omega \epsilon_a \left| \dot{\vec{E}}_m \right|} = \frac{\left| \dot{\vec{J}}_m \right|}{\left| \dot{\vec{J}}_{m \text{ см}} \right|} = \operatorname{tg} \delta \quad (2.56)$$

характеризует отношение амплитуд плотностей тока $\left| \dot{\vec{J}}_m \right|$ проводимости и тока $\left| \dot{\vec{J}}_{m \text{ см}} \right|$ смещения и называется *тангенсом угла потерь*.

Таким образом, если среда обладает проводимостью ($\sigma \neq 0$), т. е. имеют место электрические *потери*, то ее диэлектрическая проницаемость $\dot{\epsilon}$ носит *комплексный* характер.

Величина $\operatorname{tg} \delta$ вводится для характеристики качества диэлектрика. Чем больше $\operatorname{tg} \delta$, тем хуже диэлектрик.

В зависимости от величины соотношения (2.56) среды подразделяются на рис. 2.20:

- $\operatorname{tg}\delta = 0$ – идеальный диэлектрик ($\sigma = 0$);
- $\operatorname{tg}\delta \ll 1$ – реальный диэлектрик (хороший диэлектрик $\sigma = 10^{-8}-10^{-17}$);
- $\operatorname{tg}\delta \approx 1$ – полупроводник;
- $\operatorname{tg}\delta \gg 1$ – реальный проводник ($\sigma = 10^6-10^7$);
- $\operatorname{tg}\delta = \infty$ – идеальный проводник ($\sigma = \infty$).

Следует обратить внимание, что данная классификация сред зависит от частоты ω , так как $\operatorname{tg}\delta = f(\omega)$. Поэтому одна и та же среда для ЭМВ разных частот будет обладать различными свойствами.



Рис. 2.20. Классификация сред в зависимости от тангенса угла потерь

Например. Определим характер двух сред:

- сухая почва ($\sigma = 10^{-2}$ См/м; $\epsilon = 4$);
 - морская вода ($\sigma = 3$ См/м; $\epsilon = 80$)
- по их электропроводимости на частотах:
- $f_1 = 1$ МГц;
 - $f_2 = 100$ МГц;
 - $f_3 = 3000$ МГц.

Рассчитаем значения $\operatorname{tg}\delta$ для различных частот и сделаем выводы. Результаты расчета сведем в табл. 2.3.

Из анализа табл. 2.3 следует, что на *низких* частотах среда для ЭМП является *проводящей*, а с *увеличением* частоты характер среды изменяется на *диэлектрический*.

Наличие диэлектрических потерь приводит, в частности, к появлению *фазового сдвига* между векторами поля \vec{E} и \vec{D} . Покажем это.

Учитывая соотношения (2.55) и (2.56), комплексную диэлектрическую проницаемость можно записать в виде

$$\dot{\epsilon}_a = |\dot{\epsilon}_a| \cdot e^{j\delta}. \quad (2.57)$$

Тогда, учитывая материальное уравнение (2.51) для *комплексных амплитуд* гармонических векторов \vec{E} и \vec{D} , получим

$$\vec{D}_m e^{j\varphi} = |\dot{\epsilon}_a| e^{j\delta} \cdot \vec{E}_m e^{j\varphi_e} = |\dot{\epsilon}_a| \cdot \vec{E}_m e^{j(\varphi_e + \delta)}.$$

Учитывая материальное уравнение (2.51) для комплексных амплитуд гармонических векторов \vec{E} и \vec{D} , получим

$$\vec{D}_m e^{j\varphi} = |\dot{\epsilon}_a| e^{j\delta} \cdot \vec{E}_m e^{j\varphi_e} = |\dot{\epsilon}_a| \cdot \vec{E}_m e^{j(\varphi_e + \delta)}.$$

Из анализа данного выражения следует, что амплитуда (величина) вектора \vec{D} определяется в соответствии с известным (1.2) материальным уравнением

$$\vec{D}_m = |\dot{\epsilon}_a| \cdot \vec{E}_m = \epsilon_a \vec{E}_m,$$

а начальная фаза φ вектора отличается от начальной фазы φ_E вектора \vec{E} на величину угла δ (выражение (2.55)), т. е. появляется *фазовый сдвиг* между векторами поля \vec{E} и \vec{D} .

В средах с *магнитными потерями* магнитная μ_a проницаемость также будет иметь вещественную и мнимую части. В теорию электромагнитного поля комплексная магнитная проницаемость μ_a была введена в 1913 г. русским ученым В.К. Аркадьевым.

Таблица 2.3

Параметр	Частоты		
	$f_1 = 1$ МГц	$f_2 = 100$ МГц	$f_3 = 3\,000$ МГц
Сухая почва			
tg δ	45	0,45	0,015
Характер среды	Проводник	Полупроводник	Диэлектрик
Морская вода			
tg δ	67,5	6,75	0,225
Характер среды	Проводник	Ближе к проводнику	Ближе к диэлектрику

В общем случае при переходе к комплексным векторам комплексная магнитная проницаемость определяется

$$\dot{\mu}_a = \mu' - j\mu'' = |\dot{\mu}_a| \cdot e^{j\delta_m},$$

где $\delta_m = \arctg \frac{\mu''}{\mu'}$ – угол магнитных потерь. Характеризует отставание по фазе вектора \vec{B} от вектора \vec{H} , возникающее, например, в ферромагнетиках (явление гистерезиса).

Введение комплексной магнитной проницаемости в случае гармонического поля дает возможность рассмотреть ряд явлений, в которых не выполняется уравнение среды (1.3) и, в частности, учесть потери, возникающие при намагничивании.

2.9. Общие свойства уравнений электромагнитного поля

Решение многих задач макроскопической электродинамики существенно упрощается благодаря использованию ряда важных свойств уравнений Максвелла.

Рассмотрим эти свойства. Они определяются:

- принципом суперпозиции;
- принципом перестановочной двойственности;
- принципом (теоремой) взаимности.

2.9.1. Принцип суперпозиции

В уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах не входят произведения или степени величин \vec{H} , \vec{B} , \vec{E} , \vec{D} , \vec{J} , ρ характеризующих ЭМП. Поэтому формально уравнения Максвелла являются *линейными*.

Однако данный вывод будет справедлив лишь в том случае, если параметры (ϵ , μ , σ) среды не зависят от величины исследуемого поля, т. е. при условии, что среда является *линейной*.

Известно общее свойство линейных уравнений: если имеется несколько решений линейного уравнения или системы линейных уравнений, то их линейная комбинация также является решением.

Это свойство является математическим выражением принципа суперпозиции: поле, образованное несколькими источниками, можно определить как сумму полей всех источников, действующих раздельно.

Таким образом, если известно несколько решений уравнений Максвелла ($\vec{H}_1, \vec{B}_1, \vec{E}_1, \vec{D}_1, \vec{J}_1, \rho_1; \vec{H}_2, \vec{B}_2, \vec{E}_2, \vec{D}_2, \vec{J}_2, \rho_2; \dots; \vec{H}_n, \vec{B}_n, \vec{E}_n, \vec{D}_n, \vec{J}_n, \rho_n$), то решением является и их линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^n \vec{H}_i, \sum_{i=1}^n \vec{B}_i, \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \sum_{i=1}^n \vec{D}_i, \sum_{i=1}^n \vec{J}_i, \sum_{i=1}^n \rho_i.$$

Данный принцип позволяет:

- упростить анализ монохроматических полей на основе применения преобразований Фурье;
- упростить определение поля, создаваемого дискретно или непрерывно распределенными источниками. Например, при определении поля непрерывно распределенных поверхностных источников можно разделить заданную поверхность на совокупность элементарных площадок, определить поле, создаваемое каждой площадкой, а искомое поле найти суммированием полученных результатов.

Принцип суперпозиции не применим при анализе энергетических характеристик поля, поскольку энергия является нелинейной функцией напряженности поля (см. п. 3.1).

2.9.2. Принцип перестановочной двойственности

В ряде случаев решение задач электродинамики ускоряется благодаря использованию принципа перестановочной двойственности. Этот принцип вытекает из симметрии уравнений электродинамики.

Условию симметрии удовлетворяют уравнения Максвелла для пассивного (где отсутствуют сторонние источники поля) объема из идеального диэлектрика ($\sigma = 0$), тогда первое (2.10) и второе (2.11), а также третье (2.12) и четвертое (2.13) уравнения с учетом уравнений (1.2) и (1.3) среды запишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon_a \frac{d\vec{E}}{dt}; & \operatorname{div} (\epsilon_a \vec{E}) &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{d\vec{H}}{dt}; & \operatorname{div} (\mu_a \vec{H}) &= 0. \end{aligned}$$

Для данной системы замена переменных

$$\vec{E} \rightleftharpoons \vec{H}; \quad \epsilon_a \rightleftharpoons -\mu_a \quad (2.58)$$

приводит к тому, что первое уравнение преобразуется во второе, а второе – в первое. Следовательно, перестановка переменных приводит только к перестановке уравнений в системе, не изменяя ее сущности и решения.

Это дает возможность сформулировать принцип перестановочной двойственности уравнений электродинамики.

Предположим, что имеются две электродинамические задачи, сформулированные таким образом, что все условия для вектора \vec{H} (или \vec{E}) одной задачи при указанной перестановке переходят в условия для вектора \vec{E} (или \vec{H}) другой задачи. При этом геометрическая конфигурация границы области должна сохраняться.

Тогда, если известно решение для первой задачи, то решение для второй задачи может быть получено из решения для первой путем замены переменных (2.58).

Граничные условия для второй задачи находятся путем такой же перестановки.

Принцип перестановочной двойственности, впервые сформулированный советским ученым А.А. Пистолькорсом в 1944 г., можно распространить и на случай наличия в рассматриваемой области сторонних источников. При этом для обеспечения симметрии уравнений Максвелла

в них должны быть введены сторонние фиктивные магнитные источники поля (\vec{J}_M – плотность магнитного тока; ρ_M – плотность магнитных зарядов). Тогда переход от решения одной задачи электродинамики к другой осуществляется путем перестановки:

$$\begin{aligned} \vec{E} &\Leftrightarrow \vec{H}; \epsilon_a \Leftrightarrow -\mu_a; \\ \vec{J}_{ст} &\Leftrightarrow -\vec{J}_M; \rho \Leftrightarrow \rho_M. \end{aligned} \quad (2.59)$$

При изображении силовых линий электромагнитного поля, рассчитанного по *принципу перестановочной двойственности*, конфигурация силовых линий электрического поля повторяет аналогичную конфигурацию силовых линий магнитного поля в исходном электромагнитном процессе и наоборот.

Принцип перестановочной двойственности также справедлив для основных и дополнительных уравнений электродинамики в комплексной форме.

2.9.3. Принцип (теорема) взаимности

В основе данного принципа лежит теорема Лоренца, которая устанавливает связь между сторонними токами $\vec{J}_{ст}$ в двух различных точках линейной среды и электромагнитными полями, возбужденными этими токами.

Пусть в ограниченном объеме V имеются два не зависящие друг от друга источника ЭМП, один из которых определяется плотностью тока $\vec{J}_{ст1}$, распределенного в объеме ΔV_1 (рис. 2.21), а другой – плотностью тока $\vec{J}_{ст2}$, распределенного в объеме ΔV_2 .

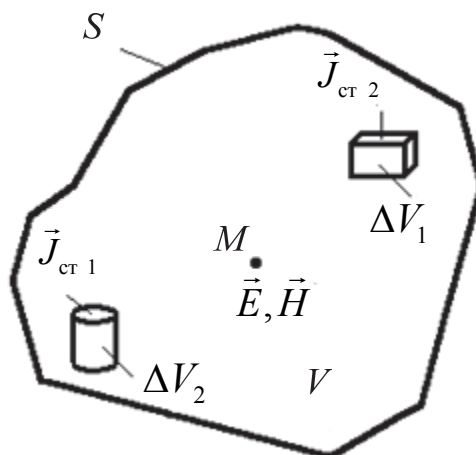


Рис. 2.21. Связь между полем и сторонними токами в двух различных точках пространства

Первый источник создает в каждой точке пространства поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 , а второй – поле \vec{E}_2, \vec{H}_2 . В силу независимости источников ЭМП для указанных полей справедливы следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} \text{rot} \dot{\vec{H}}_{m1} = \dot{\vec{J}}_{mct1} + (\sigma + j\omega\epsilon_a) \dot{\vec{E}}_{m1}; \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_{m1} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_{m1}; \end{cases} \quad (2.60)$$

$$\begin{cases} \text{rot} \dot{\vec{H}}_{m2} = \dot{\vec{J}}_{mct2} + (\sigma + j\omega\epsilon_a) \dot{\vec{E}}_{m2}; \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_{m2} = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_{m2}. \end{cases} \quad (2.61)$$

После совместных преобразований систем уравнений (2.60) и (2.61) получим соотношение

$$\text{div} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_1, \dot{\vec{H}}_2 \right] - \left[\dot{\vec{E}}_2, \dot{\vec{H}}_1 \right] \right\} = \dot{\vec{J}}_{mct1} \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{J}}_{mct2} \dot{\vec{E}}_1, \quad (2.62)$$

которое определяет связь между полем и сторонними токами в двух различных точках пространства и называется *леммой Лоренца* в дифференциальной форме.

Проинтегрируем (2.62) по некоторому объему V , ограниченному поверхностью S , и, применяя к левой части формулу Остроградского-Гаусса, окончательно получим выражение леммы Лоренца в интегральной форме:

$$\oint_S \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_1, \dot{\vec{H}}_2 \right] - \left[\dot{\vec{E}}_2, \dot{\vec{H}}_1 \right] \right\} d\vec{s} = \int_V \left(\dot{\vec{J}}_{mct1} \dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{J}}_{mct2} \dot{\vec{E}}_1 \right) dv. \quad (2.63)$$

Накладывая на выражение (2.63) ограничения, вытекающие из физической сущности решаемой задачи, получаем два независимых интеграла по объемам, где расположены источники ЭМП:

$$\int_{\Delta V_1} \dot{\vec{J}}_{mct1} \dot{\vec{E}}_2 dv = \int_{\Delta V_2} \dot{\vec{J}}_{mct2} \dot{\vec{E}}_1 dv. \quad (2.64)$$

Соотношение (2.64) называется леммой Лоренца для бесконечно большого объема (неограниченного пространства). Данное соотношение представляет собой математическую запись *принципа (теоремы) взаимности*.

Физический смысл принципа (теоремы) взаимности

Независимо от свойств изотропной линейной среды, разделяющей два произвольных объема – ΔV_1 и ΔV_2 , – условия передачи поля из объема ΔV_1 в объем ΔV_2 и обратно совершенно одинаковы.

Это следует из факта, что при равенстве объемов ΔV_1 и ΔV_2 и токов $\vec{J}_{\text{ст}1}$ и $\vec{J}_{\text{ст}2}$ из соотношения (2.64) получаем, что поле \vec{E}_1, \vec{H}_1 , создаваемое током $\vec{J}_{\text{ст}1}$ в объеме ΔV_1 , равно полю \vec{E}_2, \vec{H}_2 , создаваемому током $\vec{J}_{\text{ст}2}$ в объеме ΔV_2 .

Таким образом, процесс приема и передачи не изменится от взаимной замены передающей и приемной антенн.

Следовательно, принцип взаимности позволяет по свойствам излучающих систем судить о свойствах приемных систем и упрощает их изучение.

2.10. Методы решения уравнений электромагнитного поля

2.10.1. Теорема единственности решений уравнений ЭМП

Многие практические задачи антенной техники, техники СВЧ и других прикладных отраслей науки и техники можно свести к нескольким абстрактным электродинамическим задачам:

- задача анализа;
- внутренняя задача;
- внешняя задача;
- задача синтеза.

Задача анализа состоит в исследовании полей в заданном устройстве.

Задача синтеза является обратной задачей и состоит в создании устройства, обеспечивающего заданное распределение поля.

Внутренняя задача анализа формулируется следующим образом: *требуется определить ЭМП внутри заданного объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S* . Например, определение поля в объемном резонаторе – замкнутом объеме, ограниченном замкнутой металлической поверхностью.

Внешняя задача анализа состоит в определении ЭМП в пространстве вне конечного объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S . Например, определение ЭМП, излучаемого заданными источниками.

Необходимо отметить, что существуют задачи, в которых переплетаются свойства внутренних и внешних задач, например задача анализа ЭМП в волноводах.

Для нахождения ЭМП необходимо решить систему (табл. 2.1 или табл. 2.2) уравнений Максвелла. Так как эта система является системой дифференциальных уравнений, то искомые векторы поля \vec{E}, \vec{H} будут определены не однозначно, а лишь с точностью до произвольных функций. В связи с этим необходимо знать, при каких дополнительных условиях уравнения Максвелла будут однозначно определять поле.

Ответ на этот вопрос дает *теорема единственности*, которую приведем без доказательства.

Т е о р е м а. Внутренняя задача электродинамики, состоящая в определении векторов ЭМП \vec{E} , \vec{H} в конечном объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S (рис. 2.22), имеет единственное решение, если заданы **основные условия задачи**:

- форма и размеры объема V ;
- параметры ϵ , μ , σ среды в каждой точке объема V ;
- параметры сторонних источников внутри объема V ;

дополнительные условия задачи:

- начальные условия – в каждой точке объема V заданы значения векторов поля \vec{E} , \vec{H} в начальный момент времени $t = 0$;
- граничные условия – на поверхности S задана касательная составляющая \vec{E}_τ при $t > 0$, или задана касательная составляющая \vec{H}_τ при $t > 0$, или на части поверхности задана касательная составляющая \vec{E}_τ , а на остальной – касательная составляющая \vec{H}_τ .

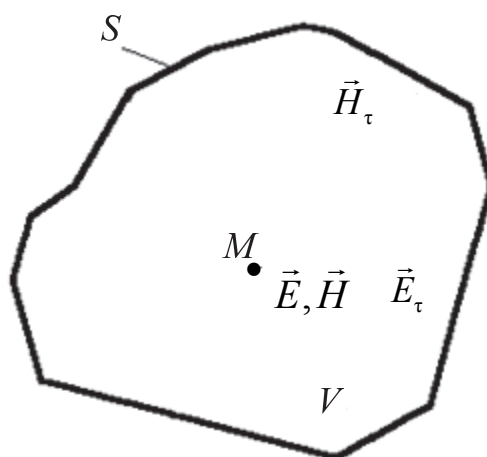


Рис. 2.22. Определение векторов \vec{E} , \vec{H} ЭМП в конечном объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S

На основании сформулированной теоремы можно утверждать, что если каким-либо методом найдено решение уравнений Максвелла, удовлетворяющее заданным *начальным и граничным* условиям, т. е. найдено ЭМП, то это решение будет *единственным*.

Как было установлено выше, уравнения Максвелла при заданных *начальных и граничных условиях* позволяют полностью определить ЭМП.

Под *определением* ЭМП следует понимать определение всех его свойств:

- нахождение величины и направления векторов \vec{H} , \vec{B} , \vec{E} , \vec{D} , \vec{J} ;
- нахождение зависимости векторов ЭМП от пространственных координат и времени (нахождение структуры поля).

Определение векторов поля \vec{E} , \vec{H} непосредственно из уравнений Максвелла приводит к весьма громоздким вычислениям, так как эти уравнения представляют систему двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными векторами \vec{E} , \vec{H} . Эти уравнения можно решать:

- путем исключения одного из двух неизвестных векторов поля (\vec{E} или \vec{H}) с последующим решением дифференциального уравнения в частных производных второго порядка;
- непосредственно.

Известные точные и приближенные методы решения различных внутренних и внешних задач основаны, как правило, на предварительном преобразовании уравнений Максвелла в волновые уравнения.

Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, записанное для мгновенных значений какого-либо из векторов поля, называют **волновым уравнением**⁸, а для комплексных амплитуд – **уравнением Гельмгольца**.

От уравнений Максвелла можно перейти к следующим уравнениям:

- волновым уравнениям для векторов электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} ;
- волновым уравнениям для электродинамических потенциалов;
- волновым уравнениям для вектора Герца.

Для упрощения рассуждений при переходе от уравнений Максвелла к волновым уравнениям электромагнитного поля будем считать, что:

- среда, в которой рассматривается поле, является линейным, однородным, изотропным, идеальным диэлектриком ($\sigma = 0$);
- ЭМП – гармоническое, что позволит волновые уравнения представлять в комплексной форме.

В этом случае уравнения Максвелла в комплексных амплитудах векторов ЭМП принимают вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{J}}_{m\text{ст}} + j\omega\epsilon_a \dot{\vec{E}}_m; \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_m; \\ \operatorname{div} \dot{\vec{D}}_m = \dot{\rho}_{m\text{ст}}; \\ \operatorname{div} \dot{\vec{B}}_m = 0. \end{cases} \quad (2.65)$$

⁸ Волновыми называются такие уравнения, которые описывают распространение колебаний в среде.

2.10.2. Метод волновых уравнений для векторов ЭМП

Для получения волновых уравнений относительно векторов \vec{E} и \vec{H} воспользуемся уравнениями Максвелла при наличии сторонних электрических зарядов $\dot{\rho}_{m\text{ст}}$ и токов $\dot{J}_{m\text{ст}}$ (2.65).

Возьмем операцию «rot» от левой и правой частей первого уравнения системы (2.65)

$$\text{rot}(\text{rot } \dot{H}_m) = \text{rot}(\dot{J}_{m\text{ст}}) + j\omega \epsilon_a \text{rot}(\dot{E}_m)$$

и подставим в полученное выражение значение $\text{rot } \dot{E}_m$ из второго уравнения системы (2.65). Тогда получим

$$\text{rot}(\text{rot } \dot{H}_m) = \text{rot}(\dot{J}_{m\text{ст}}) + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{H}_m. \quad (2.66)$$

Левую часть уравнения (2.66) преобразуем с помощью известного (см. прил.) из векторного анализа тождества

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a},$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в декартовой системе координат.

Тогда

$$\text{rot}(\text{rot } \dot{H}_m) = \text{grad}(\text{div } \dot{H}_m) - \nabla^2 \dot{H}_m = -\nabla^2 \dot{H}_m,$$

так как из четвертого уравнения Максвелла $\text{div } \dot{H}_m = 0$.

С учетом этого выражение (2.66) перепишем в виде

$$-\nabla^2 \dot{H}_m = \text{rot}(\dot{J}_{m\text{ст}}) + \omega^2 \epsilon_a \mu_a \dot{H}_m.$$

Обозначив величину

$$\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k, \quad (2.67)$$

после перегруппировки слагаемых в последнем выражении получим

$$\nabla^2 \dot{H}_m + k^2 \dot{H}_m = -\text{rot}(\dot{J}_{m\text{ст}}), \quad (2.68)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ – волновое число.

Коэффициент k является одним из параметров волнового процесса, физический смысл которого мы установим несколько позже.

Для вектора \vec{E} также можно вывести уравнение вида (2.68). Взяв операцию «rot» от обеих частей второго уравнения системы (2.65), преобразовав левую часть с помощью известного тождества и подставив в полученное выражение первое уравнение системы (2.65), получим

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = \frac{\text{grad} \dot{\rho}_{m\text{ст}}}{\epsilon_a} + j\omega\mu_a \dot{\vec{J}}_{m\text{ст}}. \quad (2.69)$$

Уравнения (2.68) и (2.69) принято называть *дифференциальными неоднородными волновыми уравнениями*. Они описывают электромагнитные возмущения, распространяющиеся в среде в виде электромагнитных волн. Эти уравнения связывают векторы \vec{E} и \vec{H} ЭМП с источниками $\dot{\rho}_{m\text{ст}}$ и $\dot{\vec{J}}_{m\text{ст}}$ поля.

Если в рассматриваемой области пространства отсутствуют ($\dot{\vec{J}}_{m\text{ст}} = 0$ и $\dot{\rho}_{m\text{ст}} = 0$) сторонние источники, то уравнения (2.68) и (2.69) записываются в форме однородных волновых уравнений:

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0; \\ \nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0. \end{cases} \quad (2.70)$$

Решение векторных уравнений (2.68), (2.69) и (2.70) в общем виде представляет определенные трудности. Поэтому каждое векторное уравнение для упрощения представляют в виде системы из трех скалярных уравнений в проекциях (например, x, y, z – декартовой системы координат) и производится их решение.

Таким образом, для нахождения векторов \vec{E} и \vec{H} из волновых уравнений необходимо решить систему из шести скалярных уравнений:

- три относительно трех проекций вектора \vec{E} ;
- три относительно трех проекций вектора \vec{H} .

Примечания:

1. При расчете ЭМП в среде с проводимостью ($\sigma \neq 0$) в уравнениях (2.67)–(2.70) абсолютную диэлектрическую проницаемость ϵ_a в соответствии с выражением (2.55) достаточно заменить на $\dot{\epsilon}_a$. При этом волновое число k будет определяться в соответствии с выражением

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \mu_a}.$$

2. Преобразования уравнений Максвелла для мгновенных значений векторов поля \vec{E} и \vec{H} приводят к векторным неоднородным уравнениям Даламбера или неоднородным волновым уравнениям вида

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot}(\vec{J}_{\text{ст}}); \\ \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\text{grad} \rho_{\text{ст}}}{\epsilon_a} + \mu_a \frac{\partial \vec{J}_{\text{ст}}}{\partial t}, \end{cases} \quad (2.71)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ – скорость распространения электромагнитных волн в рассматриваемой среде.

Аналогичные уравнения с правой частью, равной 0, называют векторными однородными уравнениями Даламбера, или однородными волновыми уравнениями.

Метод волновых уравнений для векторов ЭМП обладает существенными недостатками:

- для определения компонентов поля необходимо решить два векторных или шесть скалярных уравнений;
- в правых частях уравнений (2.68) и (2.69) имеется rot или grad возбуждающей функции, а не сама функция, поэтому возможны случаи, когда нельзя вычислить эти величины на заданной границе области, например, задача определения ЭМП, возбуждаемого проводником с переменным током⁹.

Для устранения этих недостатков используют такие методы, которые позволяют получить в правой части непосредственно сторонние токи или заряды. Примером подобных методов является метод электродинамических потенциалов.

2.10.3. Метод электродинамических потенциалов

Данный метод решения уравнений Максвелла заключается в том, что в рассмотрение вводятся вспомогательные функции, называемые *электродинамическими потенциалами*:

- векторный потенциал \vec{A}_m ;
- скалярный потенциал ϕ , через которые выражаются искомые векторы ЭМП \vec{E} и \vec{H} .

Электродинамические потенциалы вводятся на основании уравнений Максвелла следующим образом. Так как дивергенция ротора любого вектора \vec{A}_m равна нулю, т. е.

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0,$$

⁹ Плотность $\vec{J}_{\text{ст}}$ тока на границе проводника скачком изменяется до нуля, поэтому производная по нормали к поверхности проводника равна ∞ .

то из четвертого (2.49) уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \dot{\vec{B}}_m = 0$$

следует, что вектор $\dot{\vec{B}}_m$ можно представить в виде ротора некоторого вектора $\dot{\vec{A}}_m$, т. е.

$$\dot{\vec{B}}_m = \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_m. \quad (2.72)$$

При этом вектор

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_m. \quad (2.73)$$

Подставив (2.73) в волновое уравнение (2.68) для вектора \vec{H} , получим

$$\nabla^2 (\operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_m) + k^2 (\operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_m) = -\mu_a \operatorname{rot} (\dot{\vec{J}}_{m \text{ ст}}).$$

или

$$\operatorname{rot} (\nabla^2 \dot{\vec{A}}_m + k^2 \dot{\vec{A}}_m) = \operatorname{rot} (-\mu_a \dot{\vec{J}}_{m \text{ ст}}),$$

откуда находим волновое уравнение для векторного потенциала

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}}_m + k^2 \dot{\vec{A}}_m = -\mu_a \dot{\vec{J}}_{m \text{ ст}}. \quad (2.74)$$

Подставим выражение (2.72) во второе (2.47) уравнение Максвелла, получим

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -j \omega \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_m \quad \text{или} \quad \operatorname{rot} (\dot{\vec{E}}_m + j \omega \dot{\vec{A}}_m) = 0.$$

Сравним полученное выражение с известным математическим равенством

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \phi_m) = 0,$$

справедливым для любой скалярной функции ϕ_m . Из анализа результатов сравнения следует

$$\dot{\vec{E}}_m + j \omega \dot{\vec{A}}_m = -\operatorname{grad} \dot{\phi}_m$$

или

$$\dot{\vec{E}}_m = -j \omega \dot{\vec{A}}_m - \operatorname{grad} \dot{\phi}_m, \quad (2.75)$$

где ϕ_m – скалярный потенциал.

Знак минус перед $\operatorname{grad} \dot{\phi}_m$ в (2.75) поставлен для того, чтобы введенная скалярная функция $\dot{\phi}_m$ в частном случае электростатического поля представляла собой электростатический потенциал, измеряющийся ра-

ботой, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность.

Чтобы получить волновое уравнение для скалярного $\dot{\phi}_m$ потенциала, вычислим операцию div от выражения (2.75):

$$\text{div} (\dot{\vec{E}}_m) = -j \omega \text{div} (\dot{\vec{A}}_m) - \text{div} (\text{grad} \dot{\phi}_m).$$

Поскольку из третьего (2.48) уравнения Максвелла

$$\text{div} \dot{\vec{E}}_m = \frac{\rho_{\text{ст}}}{\epsilon_a},$$

а из известного (см. прил.) векторного тождества

$$\text{div} (\text{grad} \varphi) = \nabla^2 \varphi,$$

то

$$\nabla^2 \varphi + j \omega \text{div} \dot{\vec{A}}_m = -\frac{\rho_{\text{ст}}}{\epsilon_a}. \quad (2.76)$$

Из математической теории поля известно, что для определения любого векторного поля необходимо знать как его ротор (rot), так и дивергенцию (div).

Дивергенцию некоторого вектора $\dot{\vec{A}}_m$ определим, исходя из уравнения, связывающего между собой векторный $\dot{\vec{A}}_m$ и скалярный $\dot{\phi}_m$ потенциалы и называемого *уравнением калибровки*:

$$\text{div} \dot{\vec{A}}_m + j \omega \epsilon_a \mu_a \dot{\phi}_m + \sigma \mu_a \dot{\phi}_m = 0 \quad (2.77)$$

или для случая идеального ($\sigma = 0$) диэлектрика

$$\text{div} \dot{\vec{A}}_m + j \omega \epsilon_a \mu_a \dot{\phi}_m = 0 \Leftrightarrow \text{div} \dot{\vec{A}}_m = -j \omega \epsilon_a \mu_a \dot{\phi}_m = \frac{k^2 \dot{\phi}_m}{j \omega}. \quad (2.78)$$

Подставив в выражение (2.76) уравнение (2.78), получим *волновое уравнение для скалярного потенциала*

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \dot{\phi}_m = -\frac{\rho_{\text{ст}}}{\epsilon_a}. \quad (2.79)$$

Таким образом, векторный и скалярный потенциалы, как и векторы \vec{E} и \vec{H} , удовлетворяют *неоднородным волновым уравнениям*. Однако правые части уравнений для потенциалов имеют более простой вид. Поэтому

уравнения (2.74) и (2.79) оказываются более удобными при решении конкретных задач, они позволяют найти ЭМП, если известны электрические заряды или токи.

Достоинства метода электродинамических потенциалов:

- устраняет недостатки метода волновых уравнений для векторов ЭМП;
- позволяет сократить число решаемых уравнений с шести до четырех: три – для трех проекций вектора \dot{A}_m ;
одно – для скаляра $\dot{\phi}_m$.

В случае гармонических полей можно исключить из рассмотрения скалярный потенциал $\dot{\phi}_m$ и ограничиться рассмотрением одного векторного потенциала \dot{A}_m .

Действительно, выражая из (2.78) $\dot{\phi}_m$ через \dot{A}_m и подставляя его в (2.75), получаем:

$$\dot{E}_m = \frac{\text{grad}(\text{div}\dot{A}_m)}{j\omega\epsilon_a\mu_a} - j\omega\dot{A}_m .$$

В случае негармонических полей последнее выражение непосредственно применять нельзя.

2.10.4. Метод электрического вектора Герца

При решении электродинамических задач часто используют *вектор Герца*.

Известны две разновидности метода вектора Герца:

1. Метод электрического вектора Герца.
2. Метод магнитного вектора Герца.

Методы электрического и магнитного векторов Герца позволяют свести уравнения Максвелла к одному векторному уравнению. Эта возможность обусловлена тем, что скалярный $\dot{\phi}_m$ и векторный \dot{A}_m потенциалы связаны между собой *уравнением калибровки* (2.77) или (2.78), поэтому они могут быть выражены через какой-либо третий вектор.

Рассмотрим преобразование уравнений Максвелла в уравнение для *электрического* \dot{Z}_m *вектора Герца*.

Действительно, пусть скалярный $\dot{\phi}_m$ потенциал

$$\dot{\phi}_m = \text{div}\dot{Z}_m , \tag{2.80}$$

тогда векторный потенциал $\dot{\vec{A}}_m$ на основании уравнения (2.78) калибровки будет иметь вид

$$\dot{\vec{A}}_m = -j\omega\epsilon_a\mu_a\dot{\vec{Z}}_m. \quad (2.81)$$

Подставляя (2.81) в волновое уравнение (2.74) для векторного потенциала, получим

$$\nabla^2\dot{\vec{Z}}_m + k^2\dot{\vec{Z}}_m = -\frac{\dot{\vec{J}}_{m\text{ст}}}{j\omega\epsilon_a}. \quad (2.82)$$

Выражение (2.82) является *неоднородным волновым уравнением* для *электрического вектора Герца* $\dot{\vec{Z}}_m$.

Подставляя выражение (2.80) и (2.81) в (2.73) и (2.75), получим уравнения, связывающие электрический вектор Герца $\dot{\vec{Z}}_m$ с векторами \vec{E} и \vec{H} :

$$\begin{cases} -\dot{\vec{E}}_m = k^2\dot{\vec{Z}}_m + \text{grad div } \dot{\vec{Z}}_m; \\ -\dot{\vec{H}}_m = j\omega\epsilon_a \text{rot } \dot{\vec{Z}}_m. \end{cases} \quad (2.83)$$

Таким образом, для нахождения векторов \vec{E} и \vec{H} ЭМП с помощью электрического вектора Герца $\dot{\vec{Z}}_m$ достаточно решить систему трех скалярных уравнений для трех проекций вектора $\dot{\vec{Z}}_m$ (2.82), а затем из соотношений (2.83) определить векторы \vec{E} и \vec{H} .

2.10.5. Решение неоднородного волнового уравнения.

Запаздывающие потенциалы

Волновые уравнения для векторов \vec{H} (2.68), \vec{E} (2.69), \vec{A} (2.74), \vec{Z} (2.82) при наличии сторонних источников представляют один и тот же тип неоднородных волновых уравнений, который в комплексной форме может быть представлен в виде

$$\nabla^2\dot{\vec{U}}_m + k^2\dot{\vec{U}}_m = -\dot{\vec{F}}_m, \quad (2.84)$$

где $\dot{\vec{U}}_m$ – комплексная амплитуда любого из векторов \vec{H} , \vec{E} , \vec{A} или \vec{Z} ;

$\dot{\vec{F}}_m$ – комплексная амплитуда вектора, являющегося функцией источников поля.

Векторное волновое уравнение (2.84) эквивалентно трем скалярным уравнениям вида

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{U}_{mx} + k^2 \dot{U}_{mx} = -\dot{f}_{mx}; \\ \nabla^2 \dot{U}_{my} + k^2 \dot{U}_{my} = -\dot{f}_{my}; \\ \nabla^2 \dot{U}_{mz} + k^2 \dot{U}_{mz} = -\dot{f}_{mz}. \end{cases} \quad (2.85)$$

где \dot{U}_{mx} , \dot{U}_{my} , \dot{U}_{mz} и \dot{f}_{mx} , \dot{f}_{my} , \dot{f}_{mz} – одна из трех ортогональных проекций векторов $\dot{\vec{U}}_m$ и $\dot{\vec{F}}_m$ соответственно.

Скалярный потенциал сред также удовлетворяет уравнению (2.85).

Пусть дан объем V , в котором распределены источники поля \dot{f}_{mx} , \dot{f}_{my} , \dot{f}_{mz} . Необходимо найти амплитуды \dot{U}_{mx} , \dot{U}_{my} , \dot{U}_{mz} создаваемого источниками поля в точке M наблюдения (рис. 2.23).

Решение уравнения (2.85) для безграничной однородной изотропной среды определяется формулой Кирхгофа¹⁰:

$$\dot{U}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{f}}{r} e^{-jkr} dv, \quad (2.86)$$

где $\dot{U}_m(M)$ – амплитудное значение рассматриваемой величины в точке M ;
 M – точка, в которой рассматривается поле;
 V – объем, в котором сосредоточены источники поля;
 r – расстояние от точки M до любой точки внутри области V (рис. 2.23).

Мгновенное значение соответствующей величины определяется умножением правой части выражения (2.86) на множитель $e^{j\omega t}$:

$$\dot{U}(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{f}}{r} e^{j(\omega t - kr)} dv. \quad (2.87)$$

Интегрирование в формулах (2.86) и (2.87) можно рассматривать как суммирование всех волн, приходящих в точку наблюдения M из каждого элемента dV , принадлежащего объему V (рис. 2.23).

Полученное соотношение (2.87) описывает практически важное свойство ЭМП, известное из экспериментов и заключающееся в том, что ЭМП распространяется от своих источников с конечной скоростью и имеет волновой характер.

Продемонстрируем это. На основе соотношения для фазы

$$\varphi = \omega t - kr$$

¹⁰ Формула называется по имени ученого, предложившего ее в 1882 г.

запишем выражения, определяющие (рис. 2.24) одну и ту же фазу φ_0 для двух фиксированных моментов времени t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$), т. е.

$$\varphi_0 = \omega t_1 - kr_1 = \omega t_2 - kr_2 \text{ или } \omega (t_2 - t_1) = k (r_2 - r_1).$$

Поскольку $t_2 > t_1$, то $r_2 > r_1$, а следовательно, ЭМП распространяется в сторону увеличения координаты r со скоростью, определяемой

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (2.88)$$

Скорость распространения электромагнитных волн v , м/с, зависит только от параметров среды ϵ_a и μ_a . Например, скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве, где $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8.$$

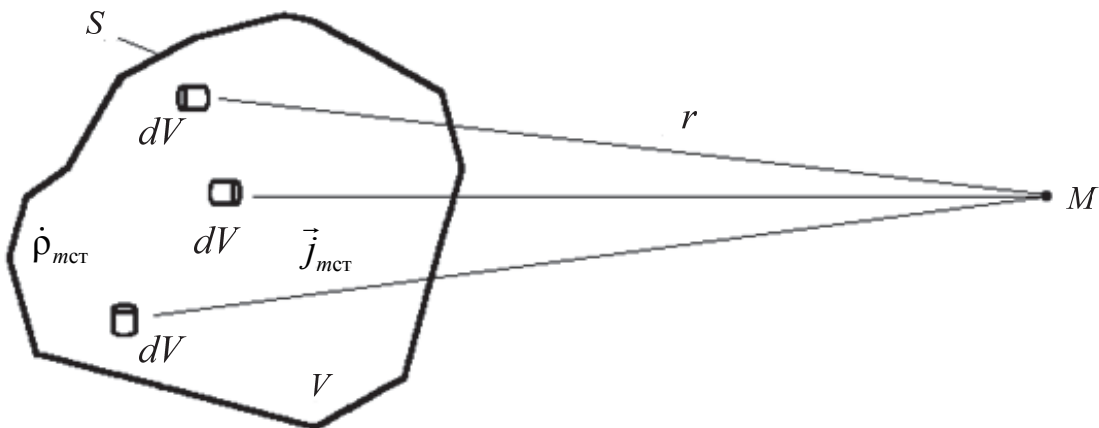


Рис. 2.23. Суммирование всех волн, приходящих в точку наблюдения M от каждого элемента dV , принадлежащего объему V

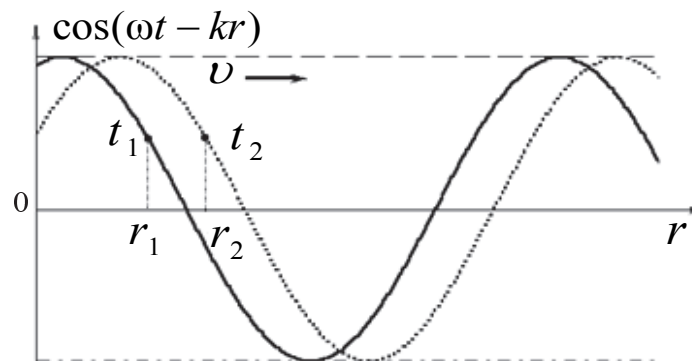


Рис. 2.24. Определение фазы волны φ_0 для двух фиксированных моментов времени t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$)

Преобразуем в подынтегральном выражении (2.87) показатель степени с учетом (2.67):

$$\omega t - kr = \omega t - \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} r = \omega \left(t - \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}} \right) = \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) = \omega (t - t_3),$$

где $t_3 = \frac{r}{v}$ называется *временем запаздывания* и определяет время, которое необходимо для того, чтобы электромагнитное колебание распространилось из точки расположения источника ЭМП до точки наблюдения M .

Этот факт являлся подтверждением принципа *близкодействия* в теории электромагнетизма, согласно которому воздействие электромагнитного процесса осуществляется не мгновенно, как предполагалось ранее в теории дальнего действия, т. е. $v = \infty$), а с конечной скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \cdot \mu_a}}$,

которая и определяет *время запаздывания* t_3 .

Таким образом, электромагнитный процесс, фаза которого перемещается с конечной скоростью v и зависит от времени t и расстояния r , называется *волновым процессом*, или *электромагнитной волной*.

Признаком волнового процесса является наличие множителей $e^{j(\omega t \pm kr)}$ или $\cos(\omega t \pm kr)$. Эти величины принято называть *волновыми множителями*.

Знак перед kr определяет направление распространения ЭМВ:

- $\varphi = \omega t - kr$ – волна распространяется в сторону *положительных* значений r ;
- $\varphi = \omega t + kr$ – волна распространяется в сторону *отрицательных* значений r .

Из анализа выражения (2.88) следует, что скорость изменения фазы v в направлении распространения определяется величиной k . Определим ее физический смысл, для чего воспользуемся определением длины волны λ .

Длина волны λ – это минимальное расстояние между двумя точками в направлении распространения процесса, фаза процесса в которых отличается на 2π в некоторый фиксированный момент времени (рис. 2.25).

Зафиксируем момент времени $t = t_1$ и рассмотрим точки r_1 и $r_2 = r_1 + \lambda$. Для этих точек имеем

$$\varphi_1 = \omega t_1 - kr_1; \quad \varphi_2 = \omega t_1 - kr_2$$

Отсюда, учитывая, что по определению $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, находим

$$\omega t_1 - kr_1 - (\omega t_1 - kr_1 - k\lambda) = 2\pi \text{ или } k\lambda = 2\pi,$$

откуда

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.89)$$

Следовательно, физически k определяет изменение фазы на единицу длины. В соответствии с этим для величины k , рад/м, приняты два названия:

- k – волновое число (для случая диэлектрика без потерь ($\sigma = 0$));
- k – коэффициент фазы.

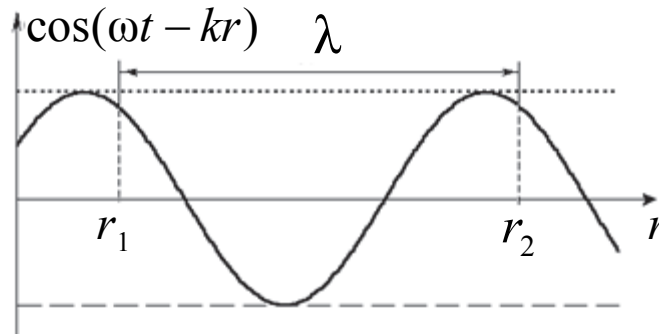


Рис. 2.25. К определению длины волны ЭМВ

Из анализа выражения (2.89) следует второе определение длины волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}} = \frac{2\pi v}{2\pi f} = vT,$$

т. е. длиной волны λ называется расстояние, проходимое ЭМВ за время одного T периода.

Применяя формулу (2.86) Кирхгофа к уравнениям (2.74) для векторного и (2.79) скалярного потенциалов, получим решения волновых уравнений для электродинамических потенциалов, которые имеют вид:

$$\dot{\vec{A}}_m = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}_{mct}}{r} e^{-jkr} dv; \quad (2.90)$$

$$\dot{\phi}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\dot{\rho}_{mct}}{r} e^{-jkr} dv. \quad (2.91)$$

Отсюда мгновенное комплексное значение электродинамических потенциалов определяется как

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}_{mct}}{r} e^{j(\omega t - kr)} dv = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\vec{J}}_{mct}}{r} e^{j\omega(t-t_3)} dv; \quad (2.92)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\dot{p}_{mct}}{r} e^{j(\omega t - kr)} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\dot{p}_{mct}}{r} e^{j\omega(t-t_3)} dv. \quad (2.93)$$

Из анализа полученных выражений следует, что значения электродинамических потенциалов в точке наблюдения M определяются величинами сторонних токов или зарядов в предшествующий момент времени $t' = t - t_3$. Следовательно, происходит запаздывание потенциалов на время $t_3 = \frac{r}{v}$. Потенциалы, определяемые выражениями (2.92) и (2.93), называются *запаздывающими потенциалами*.

2.10.6. Решение однородного волнового уравнения методом разделения переменных

На практике часто приходится для ограниченных областей пространства решать *однородные волновые уравнения*, т. е. уравнения вида (2.84) и (2.85), в которых правая часть равна нулю:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0. \quad (2.94)$$

Раскрыв оператор ∇^2 в уравнении (2.94) в прямоугольной системе координат, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0. \quad (2.95)$$

Для нахождения решения подобных скалярных уравнений при известных граничных условиях чаще всего применяют метод разделения переменных, называемый также методом Фурье.

По этому методу решение задачи проводится в системе прямоугольных (или криволинейных) ортогональных координат, выбранных так, чтобы граничные поверхности совпадали (или были параллельны) с координатами поверхности системы. Выбрав систему координат, будем искать решение дифференциального уравнения в виде трех сомножителей, каждый из которых является только функцией одной координаты. Например, в прямоугольной системе координат решение уравнения (2.95) будем искать в виде произведения трех функций-множителей:

$$U(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z). \quad (2.96)$$

Для нахождения функций-множителей, входящих в (2.96), последнее подставляют и волновое уравнение (2.95). После этого волновое уравнение разделяют на три дифференциальных уравнения, в каждое из которых вхо-

дит только одна координата (например x) и соответствующая ей функция (в рассматриваемом случае $X(x)$). В результате решения полученных таким путем дифференциальных уравнений находят общие выражения для множителей $X(x)$, $Y(y)$ и $Z(z)$, куда входят постоянные, введенные при разделении волнового уравнения.

Подставим (2.96) в выражение (2.95) и разделив полученное выражение на $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$, получим

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0.$$

Данное равенство будет соблюдаться, если каждое слагаемое равно постоянной величине, т. е.

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2; \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2; \quad \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k_z^2,$$

причем

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2.$$

Из последних двух соотношений получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + k_x^2 X(x) = 0; \\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k_y^2 Y(y) = 0; \\ \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k_z^2 Z(z) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнений подобного вида может быть представлено в вещественной форме записи:

$$X(x) = A_1 \cos(k_x x) + A_2 \sin(k_x x);$$

$$Y(y) = A_3 \cos(k_y y) + A_4 \sin(k_y y);$$

$$Z(z) = A_5 \cos(k_z z) + A_6 \sin(k_z z);.$$

Анализ данных решений волнового уравнения показывает, что первые слагаемые в правой части характеризуют бегущую волну, распространяющуюся в положительном направлении соответствующей координаты

(прямая волна), а вторые слагаемые – бегущую волну, распространяющуюся в обратном направлении (отраженная волна) при наличии отражения. Если отражения нет, то вторые слагаемые в последних соотношениях будут отсутствовать. Величины $A_1 \dots A_6$, k_x , k_y и k_z определяются с использованием граничных условий в каждой конкретной задаче.

2.10.7. Формула Кирхгофа

В п. 2.10.5 для решения задачи определения в точке M наблюдения амплитуды поля, создаваемого известными источниками поля, распределенными в некотором объеме V , применялась формула (2.86) Кирхгофа, являющаяся решением неоднородного волнового уравнения вида (2.85) для безграничной среды.

Однако существуют электродинамические задачи, когда первичные источники поля $\vec{J}_{\text{ст}}$ и $\dot{\rho}_{\text{ст}}$ неизвестны или выражаются сложной математической зависимостью, но при этом известно поле (\vec{H} , \vec{E} , \vec{A} , \vec{Z} и φ) на некоторой замкнутой поверхности S , которая охватывает излучающую систему (рис. 2.26).

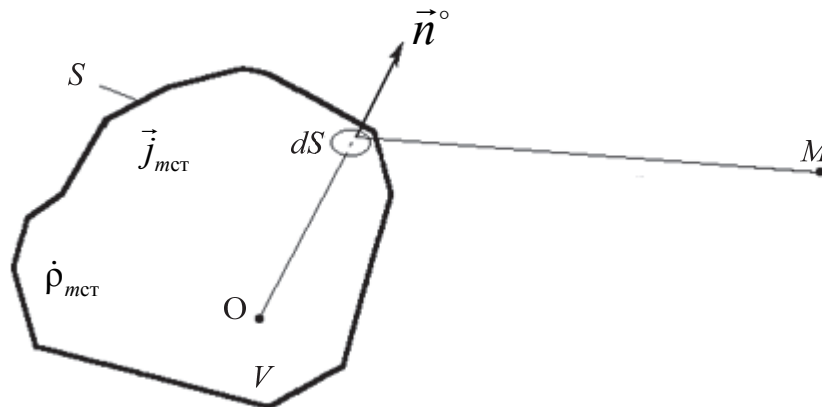


Рис. 2.26. Иллюстрация электродинамической задачи нахождения поля в точках, не охватываемых замкнутой поверхностью S

В этом случае для нахождения поля в точках, не охватываемых замкнутой поверхностью S , используется скалярная формула Кирхгофа, которая для гармонических полей имеет вид

$$\dot{U}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\partial \dot{U}_{ms}}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \dot{U}_{ms} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] ds, \quad (2.97)$$

где $\dot{U}_m(M)$ – комплексная амплитуда векторов поля \vec{H} , \vec{E} , \vec{A} , \vec{Z} в точке M ;

\dot{U}_{ms} – комплексная амплитуда векторов поля на поверхности S в месте расположения элемента ds ;

r – расстояние от точки M до элемента ds ;

\vec{n}° – нормаль к элементу ds .

Функция \dot{U}_{ms} должна удовлетворять скалярному однородному волновому уравнению.

Физический смысл выражения (2.97) заключается в том, что поле в любой точке M , не охватываемой поверхностью S , может быть представлено как суммарное поле вторичных источников, непрерывно распределенных на замкнутой поверхности S , охватывающей первичные источники.

Скалярная формула Кирхгофа не всегда удобна при решении задач электродинамики, поскольку в ряде случаев векторные волновые уравнения (2.84) нельзя разложить на эквивалентные скалярные уравнения вида (2.85). В таких случаях для нахождения поля в точках, не охватываемых замкнутой поверхностью S , используется векторная формула Кирхгофа, которая, например, для векторов \vec{E} и \vec{H} имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m(M) = & \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\left[\vec{n}^\circ, \dot{\vec{E}}_{ms} \right] \nabla \frac{e^{-jkr}}{r} + \right. \\ & \left. + \left(\vec{n}^\circ \dot{\vec{E}}_{ms} \right) \nabla \frac{e^{-jkr}}{r} - j\omega\mu_a \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\vec{n}^\circ, \dot{\vec{H}}_{ms} \right] \right) d\vec{s}; \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m(M) = & \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\left[\vec{n}^\circ, \dot{\vec{H}}_{ms} \right] \nabla \frac{e^{-jkr}}{r} + \right. \\ & \left. + \left(\vec{n}^\circ \dot{\vec{H}}_{ms} \right) \nabla \frac{e^{-jkr}}{r} + j\omega\epsilon_a \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\vec{n}^\circ, \dot{\vec{E}}_{ms} \right] \right) d\vec{s}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

где $\dot{\vec{E}}_{ms}$ и $\dot{\vec{H}}_{ms}$ – комплексная амплитуда векторов поля на поверхности S в месте расположения элемента ds ;

∇ – векторный оператор набла (оператор Гамильтона).

Формулы Кирхгофа (2.97)–(2.99) широко применяются для расчета поля различных излучающих систем СВЧ-диапазона (например, зеркальная, рупорная, линзовая антенны) в однородной безграничной среде.

Глава 3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

На практике факт существования ЭМП обнаруживается по той энергии, которой оно обладает. Как следует из рассмотренных уравнений Максвелла, изменяющееся во времени и пространстве ЭМП распространяется в пространстве в виде электромагнитных волн (ЭМВ), которые и переносят электромагнитную энергию (ЭМЭ). Все виды радиосвязи, радиолокации и другие области радиотехники основаны на способности быстропеременного ЭМП переносить энергию сигнала на большие расстояния.

Энергия ЭМП представляется *пространственно распределенной*. Это распределение характеризуется:

- пространственной плотностью ϖ ;
- вектором плотности потока мощности \vec{P} ;
- скоростью распространения ЭМВ v .

Представление о перемещении энергии в среде и связанное с ним понятие «поток мощности» было дано впервые русским физиком Н.А. Умовым в 1874 г. К таким же выводам, но применительно к ЭМП в 1884 г., не зная работ Н.А. Умова, пришел английский физик Д. Пойнтинг.

3.1. Баланс энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга

В настоящее время закон сохранения энергии признается одним из наиболее общих законов природы, относящимся ко всем областям физических явлений. Поэтому примем его за основу в исследуемом круге вопросов электродинамики.

Если рассмотреть (рис. 3.1) энергию внутри замкнутого объема V , то в общем случае она не может оставаться постоянной. К числу факторов, обуславливающих изменение энергии поля во времени, следует отнести:

1. Превращение части энергии ЭМП в энергию других видов, например в энергию тепла, связанную с протеканием тока проводимости.
2. Работу сторонних источников, которые в зависимости от конкретных условий могут как увеличивать запас энергии поля, так и уменьшать его.
3. Обмен энергией между выделенным объемом и окружающими его областями пространства за счет специфического процесса, присущего ЭМП и носящего название процесса *излучения*.

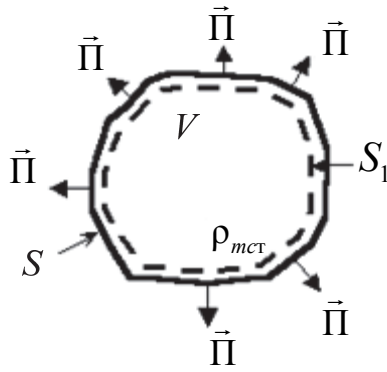


Рис. 3.1. Обмен энергией между выделенным объемом и окружающими его областями пространства

Математическая запись, учитывающая все вышеперечисленные факторы, называется *уравнением баланса энергии* (в физике это закон сохранения энергии).

Получим уравнение баланса энергии применительно к некоторому объему V , ограниченному поверхностью S , с использованием уравнений Максвелла. Допустим, что внутри объема V (рис. 3.1) имеются сторонние источники поля.

Получим сначала энергетические соотношения, характеризующие энергию поля в любой точке пространства, а затем перейдем к их интегральной оценке.

Рассмотрим с этой целью первое и второе уравнения Максвелла в дифференциальной форме для мгновенных значений векторов поля, определяемые выражениями (2.10) и (2.11). Умножая первое уравнение скалярно на вектор \vec{E} , второе – на вектор \vec{H} и вычитая первое произведение из второго, получим

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad | \quad \vec{H} \text{ (скалярное умножение частей уравнения на } \vec{H} \text{);}$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad | \quad \vec{E} \text{ (скалярное умножение частей уравнения на } \vec{E} \text{);}$$

$$\vec{H} \text{ rot}\vec{E} - \vec{E} \text{ rot}\vec{H} = -\left(\vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{E} \frac{d\vec{D}}{dt} \right) - \vec{J}\vec{E}.$$

Левую часть полученного уравнения преобразуем с помощью известного (см. прил.) векторного тождества к виду

$$\vec{H} \text{ rot}\vec{E} - \vec{E} \text{ rot}\vec{H} = \text{div}[\vec{E}, \vec{H}],$$

а слагаемые правой части преобразуем с использованием уравнений (1.2) и (1.3) изотропной среды к виду

$$\vec{E} \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{E} \frac{d(\epsilon_a \vec{E})}{dt} = \epsilon_a \vec{E} \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\epsilon_a}{2} \frac{dE^2}{dt};$$

$$\vec{H} \frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{H} \frac{d(\mu_a \vec{H})}{dt} = \mu_a \vec{H} \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{\mu_a}{2} \frac{dH^2}{dt}.$$

В результате преобразований получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) + \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] + \vec{J} \vec{E} = 0. \quad (3.1)$$

Полученное соотношение (3.1) является дифференциальной формой закона сохранения энергии ЭМП или *теоремы Умова-Пойнтинга*. Все слагаемые, входящие в (3.1), имеют размерность Вт/м³, т. е. характеризуют сумму объемных плотностей энергии ЭМП в данной точке пространства.

Более наглядной физически является интегральная форма. Проинтегрируем (3.1) по некоторому объему V , ограниченному поверхностью S (в объеме находятся источники сторонних токов, которые учитывались в уравнениях Максвелла). При интегрировании учтем, что рассматриваемый объем со временем не меняется, что позволяет поменять местами знаки производной и интеграла:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv + \int_V \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] dv + \int_V \vec{J} \vec{E} dv = 0.$$

Применяя ко второму слагаемому формулу Остроградского-Гаусса, а в третьем заменяя \vec{E} из формулы (1.1) закона Ома в дифференциальной форме при наличии сторонних источников

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}),$$

откуда

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_{\text{ст}},$$

получим

$$\int_V \vec{J} \vec{E}_{\text{ст}} dv = \int_V \frac{\vec{J}}{\sigma} dv + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv + \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}. \quad (3.2)$$

Полученное соотношение (3.2) называется теоремой Умова-Пойнтинга в интегральной форме. Выясним физический смысл всех членов уравнения (3.2).

Слагаемое $\int_V \vec{J} \vec{E}_{\text{ст}} dv$ представляет собой *мощность* $P_{\text{ст}}$, Вт, выделяемую сторонними источниками поля в объеме V , т. е.

$$P_{\text{ст}} = \int_V \vec{J} \vec{E}_{\text{ст}} dv.$$

Следовательно, все слагаемые равенства (3.2) отражают мощность.

Слагаемое $\int_V \frac{\vec{J}}{\sigma} dv$ представляет собой *мощность тепловых потерь* $P_{\text{п}}$ в единице объема, определяемую известным из закона физики законом Джоуля-Ленца, т. е.

$$P_{\text{п}} = \int_V \frac{\vec{J}}{\sigma} dv.$$

Для выяснения физического смысла слагаемого $\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv$ представим, что изнутри объема V к поверхности S примыкает другая, непроницаемая для поля поверхность S_1 (рис. 3.1), т. е. векторы \vec{E} и \vec{H} на поверхности S и вне объема равны 0, т. е.

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} = 0.$$

Тогда для изолированной области V уравнение (3.2) запишется в виде

$$\int_V \vec{J} \vec{E}_{\text{ст}} dv = \int_V \frac{\vec{J}}{\sigma} dv + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv$$

или

$$P_{\text{ст}} = P_{\text{п}} + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv. \quad (3.3)$$

Из анализа соотношения (3.3) следует, что в замкнутой области мощность сторонних источников поля $P_{\text{ст}}$ расходуется:

- на изменение энергии ЭМП W , сосредоточенной внутри объема V ;
- на преобразование в тепловую $P_{\text{п}}$, если среда обладает электрической проводимостью ($\sigma \neq 0$).

Когда преобладают потери (т. е. $P_{\text{п}} > P_{\text{ст}}$), то энергия W убывает, т. е.

$$\frac{dW}{dt} < 0.$$

Следовательно, данное слагаемое представляет собой *мощность* P , *расходуемую на накопление энергии* ЭМП W в объеме V , и определяет *скорость изменения энергии* W во времени

$$P = P_{\text{ст}} - P_{\text{п}} = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv,$$

где $W = \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dv$ – энергия, запасенная ЭМП в объеме V .

Представим выражение в виде

$$W = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dv + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dv = W_{\text{э}} + W_{\text{м}},$$

где $W_{\text{э}} = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dv = \int_V \bar{\omega}_{\text{э}} dv$ – энергия электрического поля;

$W_{\text{м}} = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dv = \int_V \bar{\omega}_{\text{м}} dv$ – энергия магнитного поля;

$\bar{\omega}_{\text{э}} = \frac{\epsilon_a E^2}{2}$ – объемная плотность энергии, обусловленная электрической составляющей ЭМП, Дж/м³;

$\bar{\omega}_{\text{м}} = \frac{\mu_a H^2}{2}$ – объемная плотность энергии, обусловленная магнитной составляющей ЭМП, Дж/м³.

Невыясненным осталось только последнее слагаемое $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}$ правой части.

Обозначим векторное произведение $[\vec{E}, \vec{H}]$ вектором плотности потока мощности $\vec{\Pi}$, Вт/м², т. е.

$$[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\Pi}. \quad (3.4)$$

Вектор плотности потока мощности $\vec{\Pi}$ принято называть вектором Умова-Пойнтинга. Тогда уравнение (3.2) с учетом введенных выше обозначений запишется в виде

$$P_{\text{ст}} = P_{\text{п}} + \frac{dW}{dt} + \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) характеризует *баланс энергии* электромагнитного поля в области V и является формулировкой *теоремы Умова-Пойнтинга*.

С целью выяснения физической сущности последнего слагаемого рассмотрим два частных случая.

С л у ч а й 1. Пусть внутри рассматриваемой области V нет тепловых потерь ($P_{\text{т}} = 0$) и запас энергии ($\frac{dW}{dt} = 0$) остается постоянным. Тогда из уравнения (3.5) следует, что

$$P_{\text{ст}} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s},$$

т. е. мощность сторонних источников расходуется за пределами области V . Следовательно, слагаемое $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s}$ представляет собой *мощность, излучаемую из объема V* .

Поток вектора $\vec{\Pi}$ численно равен плотности потока мощности излучения, т. е. количеству энергии, проходящей за единицу времени через единичную площадку S , охватывающую объем V , и перпендикулярную $\vec{\Pi}$. При этом поток считается положительным, если он выходит из объема V .

С л у ч а й 2. Пусть внутри рассматриваемой области V отсутствуют сторонние источники поля ($P_{\text{ст}} = 0$) и запас энергии ($\frac{dW}{dt} = 0$) остается постоянным. Тогда из (3.5) следует, что

$$P_{\text{т}} = -\oint_S \vec{\Pi} d\vec{s},$$

т. е. потери энергии внутри объема V имеют место за счет *поглощения энергии из окружающего пространства*. Следовательно, слагаемое $\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} = \oint_S \vec{\Pi} d\vec{s}$ представляет собой *мощность, поступающую в объем V* .

Здесь поток вектора $\vec{\Pi}$ – отрицательный, так как энергия входит в объем.

Таким образом, можно дать две формулировки *теоремы Умова-Пойнтинга*.

1. *Мощность, выделяемая сторонними источниками ЭМП $P_{\text{ст}}$, сосредоточенными в некотором объеме V , расходуется на тепловые потери мощности $P_{\text{т}}$, на изменение запаса электромагнитной энергии внутри этого объема $\frac{dW}{dt}$ и на излучение энергии $\oint_S \vec{\Pi} d\vec{s}$ через поверхность S , ограничивающую этот объем (рис. 3.2).*

2. При отсутствии ($P_{\text{ст}} = 0$) в объеме V сторонних источников поля приходящая через поверхность S мощность ЭМП $\oint_S \vec{\Pi} d\vec{s}$ расходуется на увеличение энергии электромагнитного поля ($\frac{dW}{dt} > 0$) в объеме V и на ее поглощение (тепловые $P_{\text{п}}$ потери) (рис. 3.3).

Из анализа выражения (3.4) вектор $\vec{\Pi}$ перпендикулярен векторам \vec{E} и \vec{H} и образует с ними правую тройку векторов.

Направление вектора $\vec{\Pi}$ определяется по правилу правого буравчика. Если вращать буравчик от вектора \vec{E} к вектору \vec{H} в сторону наименьшего угла (по стрелке на рис. 3.4), то поступательное движение буравчика укажет направление вектора Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi}$. Направление вектора Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi}$ в изотропной среде совпадает с направлением распространения энергии.

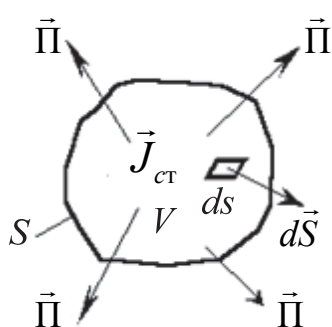


Рис. 3.2. Расходование мощности, выделяемой сторонними источниками ЭМП на тепловые потери, изменение запаса внутри объема и на излучение

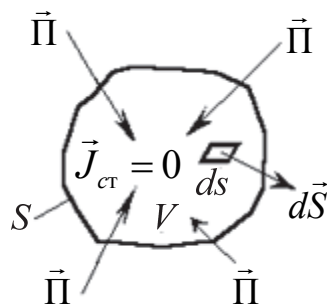


Рис. 3.3. Расходование мощности, приходящей через замкнутую поверхность, на увеличение запаса внутри объема и на ее поглощение

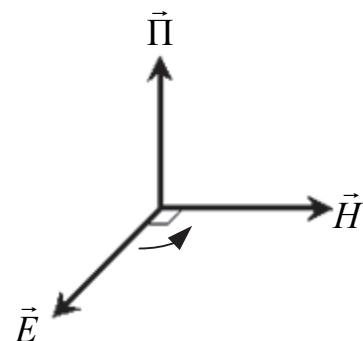


Рис. 3.4. Направление вектора Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi}$ в изотропной среде (правая тройка векторов)

Дифференциальная (3.1) и интегральная (3.2) формы записи закона сохранения энергии ЭМП или теоремы Умова-Пойнтинга, а также уравнение (3.5) баланса энергии электромагнитного поля в объеме справедливы для мгновенных (в каждый момент времени) мощностей (значений векторов \vec{J} , \vec{E} , \vec{H}) в пространстве, ограниченном поверхностью S .

Теорема Умова-Пойнтинга представляет собой одно из важнейших уравнений электродинамики, с помощью которого можно производить различные практические расчеты. Так, например, знание вектора Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi}$ позволяет определить мощность, принимаемую антенной РЛС. Представляет большой практический интерес определение энергии

электромагнитного поля, сосредоточенной в объеме V , и энергии потерь в среде, что позволяет, например, рассчитать добротность объемных резонаторов (колебательных контуров, используемых на сверхвысоких частотах).

При расчетах и теоретических исследованиях, как было указано в п. 2.8.2, удобно пользоваться *методом комплексных амплитуд*. Однако этот метод непосредственно применим лишь в случае *линейных* уравнений, а уравнения баланса энергии электромагнитного поля – *нелинейные*.

Преобразуем выражение (3.4) для случая комплексных амплитуд гармонических векторов ЭМП \vec{E} и \vec{H} .

3.2. Комплексный вектор Пойнтинга

В соответствии с п. 2.8.1 мгновенное значение действительной векторной гармонической функции может быть выражено через вещественную часть комплексной векторной функции, т. е.

$$\vec{\Psi} = \text{Re} \dot{\vec{\Psi}} = \text{Re} \left\{ \dot{\vec{\Psi}}_m e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \vec{\Psi}_m e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} = \vec{\Psi}_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Тогда выражение (3.4) можно записать в виде

$$\vec{\Pi} = [\text{Re} (\dot{\vec{E}}), \text{Re} (\dot{\vec{H}})].$$

Поскольку

$$\dot{A} + \dot{A}^* = a + jb + a - jb = 2a = 2\text{Re} (\dot{A}), \quad (3.6)$$

где $\dot{A} = a + jb$ – произвольная комплексная величина, то можем записать, что

$$\text{Re} (\dot{\vec{E}}) = 0,5 (\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}^*), \quad \text{Re} (\dot{\vec{H}}) = 0,5 (\dot{\vec{H}} + \dot{\vec{H}}^*).$$

Учитывая это, получаем выражение для мгновенного значения вектора Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \left[\frac{\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}^*}{2}, \frac{\dot{\vec{H}} + \dot{\vec{H}}^*}{2} \right] = 0,25 \left[\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}} + \dot{\vec{H}}^* \right].$$

Преобразуем полученное выражение, используя свойства векторного произведения, к виду

$$\vec{\Pi} = 0,25 \left(\left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right] + \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right] + \left[\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}} \right] + \left[\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}}^* \right] \right).$$

Из анализа полученного выражения следует, что

- первое $\left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right]$ и четвертое $\left[\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}}^* \right]$ векторные произведения являются комплексно сопряженными, а значит, в соответствии с (3.6)

$$\left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right] + \left[\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}}^* \right] = 2\text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right];$$

- второе $\left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right]$ и третье $\left[\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}} \right]$ векторные произведения также являются комплексно сопряженными, следовательно:

$$\left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right] + \left[\dot{\vec{E}}^*, \dot{\vec{H}} \right] = 2\text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right].$$

Тогда мгновенное значение вектора $\vec{\Pi}$ запишем

$$\vec{\Pi} = 0,25 \left(2\text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right] + 2\text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right] \right) = 0,5 \left(\text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right] + \text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right] \right).$$

Подставляя в полученное выражение

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m e^{j\omega t}; \quad \dot{\vec{H}}^* = \dot{\vec{H}}_m^* e^{-j\omega t}; \quad \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m e^{j\omega t}$$

и учитывая, что

$$\text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}} \right] = \text{Re} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m \right] e^{j2\omega t} \right\}, \quad \text{Re} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right] = \text{Re} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right] \right\},$$

получим

$$\vec{\Pi} = 0,5 \left(\text{Re} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m \right] e^{j2\omega t} \right\} + \text{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right] \right).$$

Первое слагаемое в скобках изменяется во времени по гармоническому закону с частотой 2ω , а второе слагаемое не зависит от времени.

В случае гармонических полей большой интерес представляют энергетические соотношения для *средних за период колебания* величин. *Средним за период T значением произвольной функции $f(t)$ называют величину*

$$f_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (3.7)$$

Определим в соответствии с (3.7) значение вектора Пойнтинга, усредненное за период колебания T , которое будем обозначать $\vec{\Pi}_{\text{cp}}$:

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{2T} \left(\int_0^T \operatorname{Re} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m \right] e^{j2\omega t} \right\} dt + \int_0^T \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right] dt \right).$$

Первое слагаемое

$$\frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \left\{ \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m \right] e^{j2\omega t} \right\} dt = 0,$$

тогда среднее за период T колебания значение вектора Пойнтинга определяется в соответствии с выражением

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{2T} \int_0^T \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right] dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right]. \quad (3.8)$$

Комплексный вектор

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}^* \right] \quad (3.9)$$

называют комплексным вектором Пойнтинга.

Вещественная часть комплексного вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ равна среднему за период значению вектора Умова-Пойнтинга, т. е.

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \operatorname{Re} \dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right].$$

Среднее значение $\vec{\Pi}_{\text{cp}}$ вектора Умова-Пойнтинга можно рассматривать как среднюю за период плотность потока мощности. Поэтому средний поток энергии (средняя *мощность* P_{Σ} излучения) через поверхность S , ограничивающую рассматриваемый объем V , определяется

$$P_{\Sigma} = \operatorname{Re} \left\{ \oint_S \dot{\vec{\Pi}} d\vec{s} \right\} = \oint_S \vec{\Pi}_{\text{cp}} d\vec{s}. \quad (3.10)$$

3.3. Примеры применения уравнения баланса энергии

Пример 1

Для пояснения энергетических соотношений рассмотрим применение уравнения баланса энергии ЭМП ($\frac{dW}{dt} = 0$) к участку цилиндрического провода длины l , находящегося в цепи стационарного тока i (рис. 3.5). По-

лучим выражение для расчета вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ в произвольной точке на поверхности проводника, радиус которого равен a .

Вектор $\vec{\Pi}$ плотности потока мощности определяется в соответствии с выражением (3.4), т. е.

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}].$$

Введем (рис. 3.6) цилиндрическую систему координат $\vec{z}^\circ = [\vec{r}^\circ, \vec{\varphi}^\circ]$ и определим направление и величину векторов \vec{E} и \vec{H} .

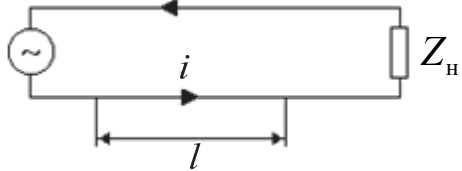


Рис. 3.5. Участок цилиндрического провода длины l , находящийся в цепи стационарного тока i

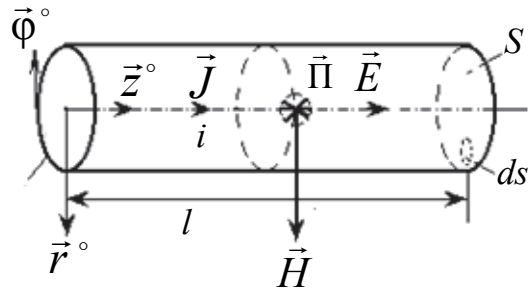


Рис. 3.6. Определение направления и величины векторов \vec{E} и \vec{H} в цилиндрической системе координат $\vec{z}^\circ = [\vec{r}^\circ, \vec{\varphi}^\circ]$

Вектор электрического поля \vec{E} определим в соответствии с законом (1.1) Ома в дифференциальной форме

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{\vec{z}^\circ J}{\sigma} = \vec{z}^\circ \frac{i}{S\sigma} = \vec{z}^\circ \frac{i}{\pi a^2 \sigma}.$$

Величина вектора магнитного поля \vec{H} определяется согласно закону (2.3) полного тока в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} ds + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} ds = \int_S \vec{J} ds,$$

поскольку ток смещения в проводнике отсутствует ($J_{\text{см}} = 0$).

Перейдем от интегральной форме к скалярной

$$\oint_L H dl \vec{\varphi}^\circ \vec{\varphi}^\circ = \int_S J ds \vec{z}^\circ \vec{z}^\circ.$$

С учетом того, что

$$\vec{\varphi}^\circ \vec{\varphi}^\circ = |\vec{\varphi}^\circ| |\vec{\varphi}^\circ| \cos(\widehat{\vec{\varphi}^\circ \vec{\varphi}^\circ}) = 1$$

получим

$$H \oint_L dl = J \int_S ds \Rightarrow HL = JS \Rightarrow H = \frac{JS}{L} = \frac{iS}{SL} = \frac{i}{2\pi a}.$$

Направление вектора \vec{H} определяется *правилом правого буравчика*, т. е.

$$\vec{H} = \vec{\varphi}^\circ \frac{i}{2\pi a}.$$

С учетом полученных уравнений выражение для расчета вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ в произвольной точке на поверхности проводника радиуса a имеет следующий вид:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \left[\vec{z}^\circ \frac{i}{\pi a^2 \sigma}, \vec{\varphi}^\circ \frac{i}{2\pi a} \right] = -\vec{r}^\circ \cdot \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}.$$

Из анализа полученного выражения следует, что вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ во всех точках внутри проводника перпендикулярен оси провода (т. е. $\vec{\Pi} \perp \vec{z}^\circ$) и направлен от периферии к центру. Это свидетельствует о том, что внутри провода поток энергии направлен от поверхности провода к его оси. *В направлении, параллельном оси провода (от источника к нагрузке), движения энергии внутри провода не происходит.*

Запишем уравнение (3.5) баланса энергии ЭМП в области объема проводника V . С учетом того, что сторонние источники энергии в пределах V отсутствуют ($P_{\text{ст}} = 0$) и в цепи ($\frac{dW}{dt} = 0$) протекает стационарный ток i , получаем

$$0 = P_{\text{п}} + \oint_{S_{\text{бок}}} \vec{\Pi} d\vec{s} \Rightarrow P_{\text{п}} = \oint_{S_{\text{бок}}} \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \vec{r}^\circ d\vec{s},$$

где $S_{\text{бок}} = 2\pi a l$ – площадь боковой поверхности цилиндрического проводника.

Перейдем от интегральной формы к скалярной

$$P_{\text{п}} = \oint_{S_{\text{бок}}} \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \vec{r}^\circ d\vec{s} = \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \oint_{S_{\text{бок}}} ds = \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} S_{\text{бок}} = i^2 \frac{l}{\pi a^2 \sigma} = i^2 R,$$

где $R = \frac{l}{\pi a^2 \sigma}$ – омическое сопротивление участка проводника длиной l .

Из анализа полученного выражения следует:

- уравнение баланса энергии ЭМП выполняется: мощность, которую ЭМП вносит в объем провода V через его боковую поверхность $S_{\text{бок}}$, тратится на нагревание провода;

• мощность потерь энергии ЭМП P_n в объеме провода V определяется в соответствии с законом Джоуля-Ленца в интегральной форме.

Пример 2

Применительно к цепи ($\frac{dW}{dt} = 0$) стационарного тока i (рис. 3.5) определим направление вектора Пойнтинга \vec{P} в произвольной точке пространства, расположенной между проводниками.

Вектор плотности потока мощности \vec{P} определяется в соответствии с выражением (3.4).

Направление вектора \vec{H} определяется согласно закону полного тока по правилу правого буравчика и совпадает с направлением вектора \vec{H} внутри проводника (рис. 3.7).

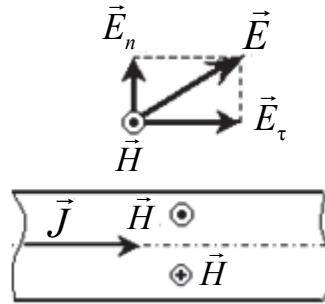


Рис. 3.7. Определение направления вектора Пойнтинга \vec{P} в произвольной точке пространства, расположенной между проводниками

Вектор \vec{E} в произвольной точке пространства, расположенной между проводниками, будет иметь две составляющие:

- \vec{E}_τ – тангенциальную, обусловленную граничными условиями

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$$

и пропорциональную

$$\vec{E}_{\tau 2} \sim \vec{J} / \sigma;$$

- \vec{E}_n – нормальную, обусловленную разностью потенциалов между проводниками.

Таким образом, направление вектора \vec{E} будет определяться векторной суммой его составляющих:

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_\tau.$$

В соответствии с выражением (3.4) вектор Пойнтинга \vec{P} в произвольной точке пространства определяется как

$$\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}] = [(\vec{E}_n + \vec{E}_\tau), \vec{H}] = [\vec{E}_n, \vec{H}] + [\vec{E}_\tau, \vec{H}] = \vec{P}_\tau + \vec{P}_n,$$

т. е. вектор плотности потока мощности $\vec{\Pi}$ в любой точке пространства вокруг проводов имеет две составляющие (рис. 3.8):

- $\vec{\Pi}_\tau$ – тангенциальная составляющая вектора Пойнтинга, направленная вдоль проводов от источника к нагрузке, свидетельствует о том, что *электромагнитная энергия от источника к нагрузке передается в пространстве вокруг проводов*;
- $\vec{\Pi}_n$ – нормальная составляющая вектора Пойнтинга, направленная перпендикулярно поверхности проводника, свидетельствует о том, что часть электромагнитной энергии уходит в проводник и там рассеивается на тепло.

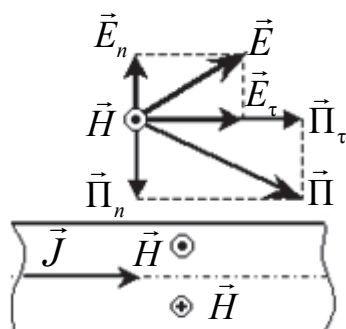


Рис. 3.8. Разложение вектора $\vec{\Pi}$ в любой точке пространства вокруг проводов на две составляющие

На основании рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы.

1. Электромагнитная энергия в цепи передается в пространстве между проводами. При этом провода выполняют роль *направляющей системы* для передачи электромагнитной энергии от источника потребителю. Выражение «передача электроэнергии по проводам» не является строгим, более точно – «передача электроэнергии с помощью проводов».

2. КПД линии передачи электромагнитной энергии тем выше, чем больше отношение

$$\frac{\Pi_\tau}{\Pi_n} = \frac{E_n}{E_\tau}.$$

Поэтому на практике стремятся передавать электромагнитную энергию при высокой разности потенциалов между проводами и при малом токе. КПД линии передачи зависит от проводимости материала проводов σ . С увеличением σ КПД растет.

Таким образом, рассмотрены основные определения и характеристики особого вида материи – электромагнитного поля, а также математический аппарат, определяющий взаимосвязь величин, характеризующих ЭМП, с величинами, характеризующими источники поля и среду, общие свойства и методы решения уравнений электромагнитного поля.

Глава 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Радиолокация, радиосвязь, телевидение и другие области радиотехники, где применяется передача электромагнитной энергии без проводов, основываются на излучении ЭМВ.

Под излучением понимают перенос энергии электромагнитными волнами из области, где расположены источники, в окружающее пространство.

Возможность излучения вытекает из рассмотренного в главе 3 уравнения баланса энергии электромагнитного поля. При этом мощность излучения P_{Σ} (выражение (3.10)) определяется средним за период значением вектора Пойнтинга \vec{P} .

Излучение электромагнитной энергии возможно только при переменных токах.

Возможность излучения ЭМВ экспериментально впервые была доказана опытами Г. Герца. Определяющее значение в использовании ЭМВ для практической деятельности человека и, следовательно, для становления современной радиотехники имело изобретение радио А.С. Поповым в 1895 г.

Системы, специально предназначенные для излучения электромагнитной энергии, называются передающими антеннами. *Передающая антенна* преобразует энергию электрического тока достаточно высокой частоты в энергию ЭМВ (радиоволны).

Обратная задача решается *приемной антенной*, которая энергию свободных электромагнитных волн преобразует в энергию электрического тока.

Практически применяемые антенны представляют собой достаточно сложные устройства. Для изучения их свойств необходимо знать принципы излучения ЭМВ и свойства простейших излучателей:

- элементарный электрический вибратор или диполь Герца;
- элементарный магнитный вибратор или элементарная рамка;
- элементарная площадка или элемент Гюйгенса;
- элементарная щель.

4.1. Элементарный электрический вибратор

Пусть имеется произвольный проводник (рис. 4.1) с переменным током, распределенным вдоль его длины по закону

$$I(l) = I_m e^{j\varphi_0(l)}.$$

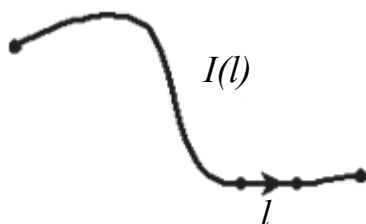


Рис. 4.1. Произвольный проводник с переменным током, распределенным вдоль его длины

Такой проводник может быть разбит на элементарные участки длиной l . Если длина элементарного участка l значительно меньше длины волны λ ¹¹ ($l \ll \lambda$), то в пределах такого участка амплитуду I_m и фазу тока φ_0 можно считать постоянными, хотя от элемента к элементу амплитуды и фазы токов меняются.

Определив поле в заданной точке пространства от каждого элемента l , можно определить поле всего провода (антенны) путем векторного суммирования полей элементарных участков.

Элементарным электрическим вибратором (ЭЭВ) называется отрезок линейного проводника, по которому протекает переменный электрический ток, амплитуда и фаза которого постоянны, причем длина проводника l значительно меньше длины волны λ в вакууме, т. е.

- $l \ll \lambda$;
- $I_m(l) = \text{const}$;
- $\varphi_0(l) = \text{const}$.

Элементарный электрический вибратор (элементарный электрический излучатель, диполь Герца, вибратор Герца) изображается в соответствии с рис. 4.2. Цепь тока проводимости \vec{J} в соответствии с *законом непрерывности полного тока* замыкается через ток смещения $\vec{J}_{\text{см}}$.

ЭЭВ является, по существу, идеализацией, удобной для анализа, так как практически создание вибратора с неизменным по всей длине распределением тока невозможно.

4.1.1. Расчет поля элементарного электрического вибратора

Пусть задан элементарный электрический вибратор (ЭЭВ) длиной l и диаметром d , вдоль которого протекает гармонически изменяющийся во времени ток (рис. 4.3).

Вибратор расположен в безграничной изотропной идеальной ($\sigma = 0$) среде, характеризуемой параметрами ϵ_a и μ_a . Других источников ЭМП во всем пространстве, окружающем вибратор, нет. Требуется определить ЭМП в любой точке пространства вокруг вибратора, т. е. определить векторы \vec{E} и \vec{H} .

¹¹ Определение длины волны λ приведено в п. 2.10.5.

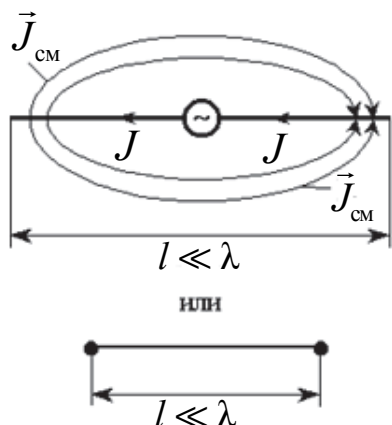


Рис. 4.2. Элементарный электрический излучатель, диполь Герца

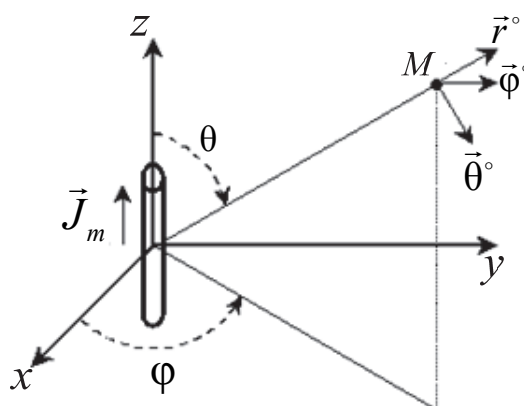


Рис. 4.3. Элементарный электрический вибратор, расположенный в безграничной изотропной идеальной ($\sigma = 0$) среде

При решении задачи вводятся следующие допущения:

- диаметр d элементарного электрического вибратора значительно меньше его длины l , т. е. $d \ll l$;
- расстояние r от ЭЭВ до точки M наблюдения во много раз больше длины l вибратора, т. е. $l \ll r$;
- середина ЭЭВ совпадает с началом прямоугольной системы координат, а OZ направлена вдоль оси вибратора;
- центр сферической системы координат совпадает с прямоугольной, а полярная ось сферической системы также направлена вдоль оси вибратора.

Первые два допущения позволяют считать, что расстояния от любой точки вибратора до точки M наблюдения одинаковы.

Поскольку ток в ЭЭВ изменяется по гармоническому закону, то воспользуемся методом комплексных амплитуд

$$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{J}}_m e^{j\omega t}.$$

Искомые векторы \vec{E} и \vec{H} ЭМП являются решением уравнений Максвелла (2.46)–(2.53), которые необходимо преобразовать в волновые уравнения (уравнения Гельмгольца). Воспользуемся методом электродинамических потенциалов. Задачу будем решать в три этапа.

1. Определение векторного \vec{A} потенциала из волнового уравнения

$$\nabla^2 \dot{\vec{A}}_m + k^2 \dot{\vec{A}}_m = -\mu_a \dot{\vec{J}}_{m\text{ст}}.$$

2. Определение вектора \vec{H} по известному \vec{A} в соответствии с выражением

$$\dot{H}_m = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{A}_m.$$

3. Определение вектора \vec{E} по известному \vec{H} в соответствии с первым (2.46) уравнением Максвелла

$$\dot{E}_m = \frac{\operatorname{rot} \dot{H}_m - \dot{J}_{m\text{ст}}}{j\omega\epsilon_a}.$$

Решение волнового уравнения для векторного потенциала \vec{A} , исходя из физической сущности решаемой задачи, определяется в соответствии с формулой Кирхгофа вида (2.86)

$$\dot{A}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-jkr}}{r} \mu_a \dot{J}_{m\text{ст}} dv. \quad (4.1)$$

Интегрирование в (4.1) по произвольному объему V , содержащему точку M наблюдения, можно заменить интегрированием по объему ЭЭВ, поскольку во всех остальных точках V источников ($\dot{J}_{m\text{ст}} = 0$) поля нет.

Поскольку ток протекает в направлении оси вибратора (см. рис. 4.3), т. е. объемная плотность тока проводимости $\dot{J}_{m\text{ст}}$ имеет только одну составляющую $\dot{J}_{m\text{ст}} = \vec{z}^\circ \dot{J}_{m\text{ст}}$, то векторный потенциал \vec{A} также имеет одну составляющую

$$\dot{A}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-jkr}}{r} \mu_a \vec{z}^\circ \dot{J}_{m\text{ст}} dv. \quad (4.2)$$

Разобьем интегрирование по объему ЭЭВ V на интегрирование по площади поперечного сечения вибратора S и по его длине l

$$\dot{A}_m(M) = \vec{z}^\circ \frac{\mu_a}{4\pi} \int_S \dot{J}_{m\text{ст}} ds \int_l \frac{e^{-jkr}}{r} dl. \quad (4.3)$$

Формулу (4.3) упростим:

- первый интеграл преобразуется к виду

$$\int_S \dot{J}_{m\text{ст}} ds = \dot{J}_{m\text{ст}} S = \dot{I}_{m\text{ст}},$$

- второй интеграл с учетом допущений ($d \ll l \ll r$) преобразуется к виду

$$\int_l \frac{e^{-jkr}}{r} dl = \frac{e^{-jkr}}{r} \int_l dl = \frac{e^{-jkr}}{r} l.$$

Тогда после интегрирования находим векторный потенциал \vec{A}

$$\dot{\vec{A}}_m(M) = \vec{z}^\circ \frac{\mu_a \dot{I}_{мст} l}{4\pi r} e^{-jkr}. \quad (4.4)$$

Определим вектор напряженности магнитного поля \vec{H} , создаваемого ЭЭВ в точке наблюдения M , для чего в выражение (2.73) подставим найденное значение (4.4) векторного потенциала \vec{A} , т. е.

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \left(\vec{z}^\circ \frac{\mu_a \dot{I}_{мст} l}{4\pi r} e^{-jkr} \right) = \frac{\dot{I}_{мст} l}{4\pi} \text{rot} \left(\vec{z}^\circ \frac{e^{-jkr}}{r} \right). \quad (4.5)$$

Используя известное (см. прил.) тождество векторной алгебры

$$\text{rot}(b \vec{a}) = b \text{rot}(\vec{a}) + [\text{grad}(b); \vec{a}],$$

где b и \vec{a} – произвольные скаляр и вектор.

Вычислим

$$\text{rot} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \vec{z}^\circ \right) = \frac{e^{-jkr}}{r} \text{rot}(\vec{z}^\circ) + \left[\text{grad} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right); \vec{z}^\circ \right] = \left[\text{grad} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right); \vec{z}^\circ \right],$$

так как \vec{z}° – орт и, следовательно, $\text{rot}(\vec{z}^\circ) = 0$.

Дальнейший анализ полученного выражения будем проводить в сферической системе координат, тогда

$$\text{grad}(b) = \vec{n}^\circ \frac{db}{dn},$$

где \vec{n}° – орт нормали к поверхности $b = \text{const}$, принимает следующий вид:

$$\text{grad}(b) = \vec{r}^\circ \frac{db}{dr},$$

а

$$\text{grad} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \vec{r}^\circ \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) = \vec{r}^\circ \frac{-jkr e^{-jkr} - e^{-jkr}}{r^2} = -\vec{r}^\circ \frac{jkr + 1}{r^2} e^{-jkr}.$$

С учетом проведенных преобразований выражение (4.5) для вектора \vec{H} принимает вид

$$\dot{\vec{H}}_m = -\frac{\dot{I}_{m\text{ст}} l}{4\pi} \frac{jk r + 1}{r^2} e^{-jk r} [\vec{r}^\circ; \vec{z}^\circ] = \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} l e^{-jk r}}{4\pi r^2} (1 + jk r) [\vec{z}^\circ; \vec{r}^\circ]$$

Раскрывая векторное произведение

$$[\vec{z}^\circ; \vec{r}^\circ] = \vec{\varphi}^\circ \sin \theta,$$

окончательно получаем выражение для вектора напряженности магнитного поля \vec{H} , создаваемого ЭЭВ в точке наблюдения M :

$$\dot{\vec{H}}_m = \vec{\varphi}^\circ \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} l e^{-jk r}}{4\pi r^2} (1 + jk r) \sin \theta. \quad (4.6)$$

Из анализа выражения (4.6) следует:

- вектор магнитного поля \vec{H} имеет только одну (*азимутальную*) составляющую

$$\dot{H}_{mr} = 0; \dot{H}_{m\theta} = 0; \dot{H}_{m\varphi} = \vec{\varphi}^\circ \dot{H}_m$$

и лежит в плоскости, перпендикулярной оси вибратора. Данный вывод подтверждает правильность полученных результатов, поскольку согласно первому закону Максвелла прямолинейный ток может создать только кольцевые магнитные линии, лежащие в плоскостях, перпендикулярных направлению тока;

- наибольшее значение амплитуда вектора напряженности магнитного поля \vec{H} достигает в плоскости, проходящей через центр ЭЭВ и перпендикулярной его оси, т. е. при $\theta = 90^\circ$.

Вектор \vec{E} в точке наблюдения M будем определять по известному (4.6) вектору \vec{H} в соответствии с первым (2.46) уравнением Максвелла, учитывая, что в точке наблюдения $\dot{J}_{m\text{ст}} = 0$, т. е.

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{1}{j\omega\epsilon_a} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m. \quad (4.7)$$

В сферической системе координат произвольный вектор \vec{a} и его ротор ($\text{rot} \vec{a}$) может быть представлен в виде

$$\vec{a}(r, \theta, \varphi) = \vec{r}^\circ a_r + \vec{\theta}^\circ a_\theta + \vec{\varphi}^\circ a_\varphi,$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{r}^\circ & \vec{\theta}^\circ & \vec{\varphi}^\circ \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{d}{dr} & \frac{d}{d\theta} & \frac{d}{d\varphi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin \theta a_\varphi \end{vmatrix}.$$

Подставим вместо вектора \vec{a} выражение (4.6) для вектора \vec{H} и получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H}_m &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\dot{H}_{m\varphi} \sin \theta) \vec{r}^\circ - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \dot{H}_{m\varphi}) \vec{\theta}^\circ = \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\dot{I}_{m\text{ст}} e^{-jkr}}{4\pi r^2} (1 + jkr) \sin^2 \theta \right) \vec{r}^\circ - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\dot{I}_{m\text{ст}} e^{-jkr}}{4\pi r} (1 + jkr) \sin \theta \right) \vec{\theta}^\circ = \\ &= \vec{r}^\circ \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} e^{-jkr}}{2\pi r^3} (1 + jkr) \cos \theta + \vec{\theta}^\circ \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} e^{-jkr}}{4\pi r^3} \sin \theta (1 + jkr - k^2 r^2). \end{aligned}$$

Подставим полученный результат в формулу (4.7) и получим выражение для вектора \vec{E} в точке наблюдения M :

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{r}^\circ \dot{E}_{mr} + \vec{\theta}^\circ \dot{E}_{m\theta} + \vec{\varphi}^\circ \dot{E}_{m\varphi},$$

где

$$\dot{\vec{E}}_{mr} = \vec{r}^\circ \dot{E}_{mr} = -j \vec{r}^\circ \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} e^{-jkr}}{2\pi \omega \epsilon_a r^3} (1 + jkr) \cos \theta; \quad (4.8)$$

$$\dot{\vec{E}}_{m\theta} = \vec{\theta}^\circ \dot{E}_{m\theta} = -j \vec{\theta}^\circ \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} e^{-jkr}}{4\pi \omega \epsilon_a r^3} \sin \theta (1 + jkr - k^2 r^2); \quad (4.9)$$

$$\dot{\vec{E}}_{m\varphi} = \vec{\varphi}^\circ \dot{E}_{m\varphi} = 0.$$

Из анализа полученных выражений следует:

- вектор \vec{E} в точке наблюдения M имеет две ($\dot{\vec{E}}_{mr}$ – радиальная и $\dot{\vec{E}}_{m\theta}$ – угломестная) составляющие (рис. 4.4);
- в точках ($\theta = 0$), лежащих на оси вибратора, составляющая $\dot{\vec{E}}_{m\theta} = 0$, а $\dot{\vec{E}}_{mr}$ достигает своего максимального значения;

• в точках ($\theta = 90^\circ$), лежащих на плоскости, проходящей через центр ЭЭВ перпендикулярно его оси, составляющая $\dot{\vec{E}}_{mr} = 0$, а $\dot{\vec{E}}_{m\theta}$ достигает своего максимального значения.

Поскольку обе составляющие вектора \vec{E} лежат в плоскостях, проходящих через ось ЭЭВ, то и результирующий вектор \vec{E} в любой точке наблюдения M лежит в этой же плоскости.

Следовательно, векторы \vec{E} и \vec{H} лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях и в любой точке пространства $\vec{E} \perp \vec{H}$ (рис. 4.5).

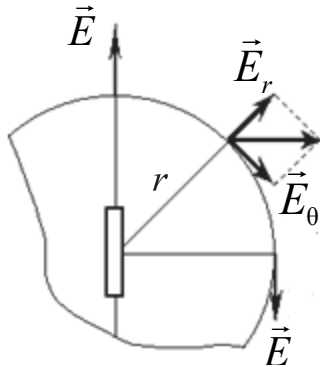


Рис. 4.4. Радиальная и угловая составляющие вектора \vec{E} в точке наблюдения

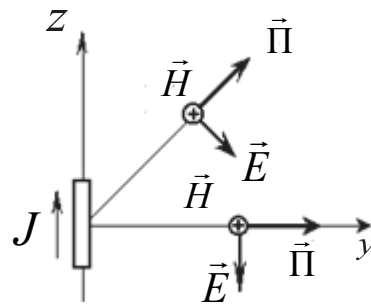


Рис. 4.5. Взаимное расположение векторов \vec{E} и \vec{H} в любой точке пространства ($\vec{E} \perp \vec{H}$)

Плоскость, в которой лежит вектор \vec{E} , называется *электрической плоскостью*. Плоскость, в которой лежит вектор \vec{H} , называется *магнитной плоскостью*.

Таким образом, мы определили ЭМП (векторы \vec{E} и \vec{H}) в любой точке пространства вокруг вибратора.

Преобразуем выражения (4.6), (4.8) и (4.9) к виду

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_{m\varphi} &= \vec{\varphi}^\circ \frac{\dot{I}_{мст} l k^2}{4\pi} \sin\theta \left(j/kr + 1/(kr)^2 \right) e^{-jkr}; \\ \dot{\vec{E}}_{mr} &= -j\vec{r}^\circ \frac{\dot{I}_{мст} l k^3}{2\pi\omega\epsilon_a} \cos\theta \left(j/(kr)^2 + 1/(kr)^3 \right) e^{-jkr}; \\ \dot{\vec{E}}_{m\theta} &= -j\vec{\theta}^\circ \frac{\dot{I}_{мст} l k^3}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \left(-1/kr + j/(kr)^2 + 1/(kr)^3 \right) e^{-jkr} \end{aligned} \right. \quad (4.10)$$

и проанализируем электромагнитное поле, создаваемое ЭЭВ, для чего все пространство, окружающее диполь Герца, разобьем на три зоны:

1. Ближняя зона, где $r \ll \lambda \Rightarrow 1/kr \gg 1$;
2. Промежуточная зона, где $r \approx \lambda \Rightarrow 1/kr \approx 1$;
3. Дальняя зона, где $r \gg \lambda \Rightarrow 1/kr \ll 1$.

Обычно при рассмотрении ЭМП конкретной антенны интерес представляет ближняя и дальняя зоны.

4.1.2. Анализ поля элементарного электрического вибратора в ближней зоне

В ближней зоне ЭЭВ $kr \ll 1$, тогда из анализа рис. 4.6 следует, что

$$1/kr \ll 1/(kr)^2 \ll 1/(kr)^3,$$

поэтому в выражении (4.10) величинами $1/kr$ для \vec{H} и $1/kr, 1/(kr)^2$ для \vec{E} можно пренебречь, тогда поле, создаваемое диполем Герца в ближней зоне, будет определяться:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_{m\varphi} = \vec{\varphi}^\circ \frac{\dot{I}_{mcr}l}{4\pi r^2} \sin\theta e^{-jkr}; \\ \dot{\vec{E}}_{mr} = -j\vec{r}^\circ \frac{\dot{I}_{mcr}l}{2\pi\omega\epsilon_a r^3} \cos\theta e^{-jkr}; \\ \dot{\vec{E}}_{m\theta} = -j\vec{\theta}^\circ \frac{\dot{I}_{mcr}l}{4\pi\omega\epsilon_a r^3} \sin\theta e^{-jkr}. \end{cases} \quad (4.11)$$

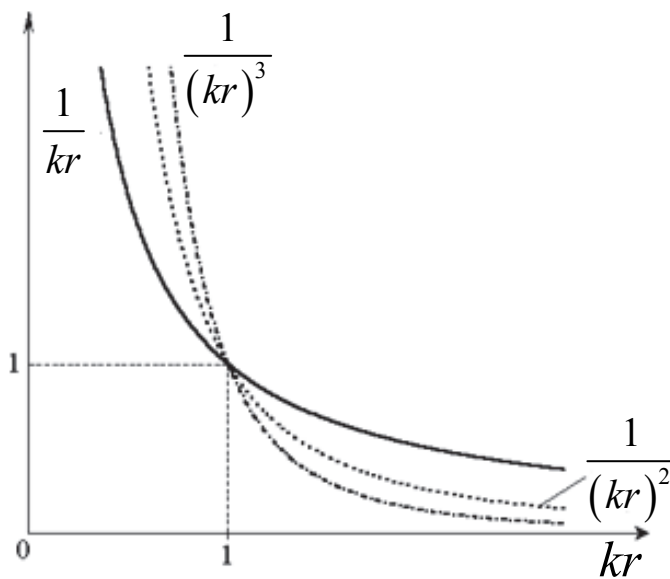


Рис. 4.6. Графические зависимости $1/kr, 1/(kr)^2$ и $1/(kr)^3$, от величины произведения kr

Из анализа выражения (4.11) следует:

- магнитное поле имеет одну (\vec{H}_φ) составляющую, а электрическое – две (\vec{E}_r и \vec{E}_θ), причем векторы \vec{E} и \vec{H} лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Электрические и магнитные силовые линии в любой точке пространства взаимно *перпендикулярны*;
- амплитуда напряженности электрического поля уменьшается пропорционально $1/r^3$, а амплитуда напряженности магнитного поля – пропорционально $1/r^2$;
- наличие « j »¹² в выражениях для электрического поля означает, что между векторами \vec{E} и \vec{H} имеется сдвиг по фазе на 90° . Поле, в котором векторы \vec{E} и \vec{H} сдвинуты по фазе на 90° , называется *реактивным*, т. е. не-распространяющимся;
- направление вектора $\vec{\Pi}$ Пойнтинга дважды за период меняется на противоположное (рис. 4.7), а его среднее $\vec{\Pi}_{\text{ср}}$ за период значение равно нулю, т. е. вся энергия ЭМП сосредоточена в ближней зоне;
- вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ имеет две составляющие: $\vec{\Pi}_\theta = [\vec{E}_r, \vec{H}_\varphi]$ – угломестную и $\vec{\Pi}_r = [\vec{E}_\theta, \vec{H}_\varphi]$ – радиальную;
- ввиду того что в выражении (4.11) учтены только слагаемые с более высокой степенью $1/kr$, угол между векторами \vec{E} и \vec{H} не равен 90° , а близок к 90° . Поэтому $\vec{\Pi}_{\text{ср}} \neq 0$ и в ближней зоне есть часть поля, у которого вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ направлен от диполя, вследствие чего мощность попадает в дальнюю зону.

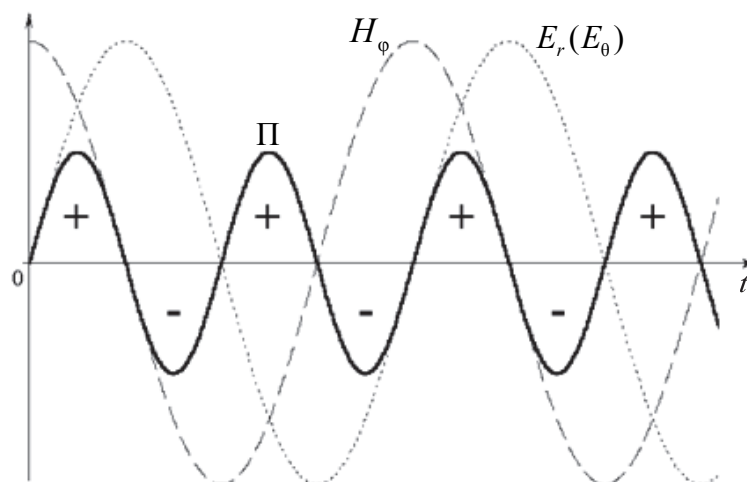


Рис. 4.7. Изменение направления вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ за период поля

¹² Из формулы Эйлера следует, что $j = e^{j0,5\pi}$.

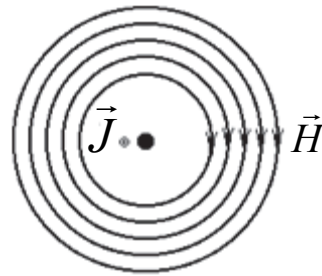


Рис. 4.8. Структура магнитного поля диполя Герца в фиксированный момент времени

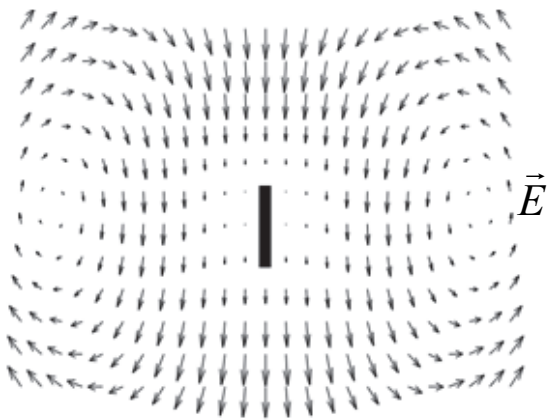


Рис. 4.9. Структура электростатического поля диполя Герца в фиксированный момент времени

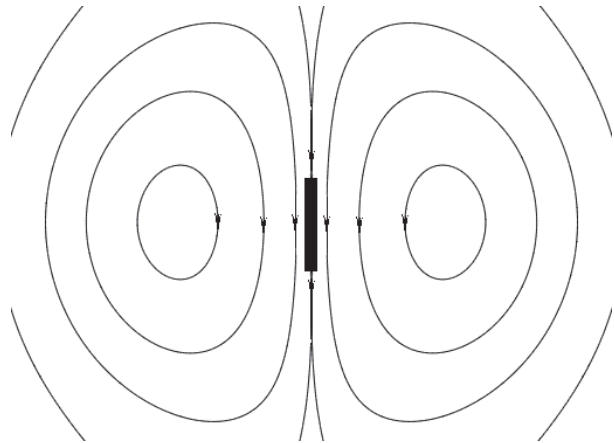


Рис. 4.10. Структура электрического поля диполя Герца в фиксированный момент времени

По структуре магнитное поле в фиксированный момент времени (рис. 4.8) диполя Герца совпадает с магнитным полем постоянного тока. Электрическое поле (рис. 4.9 и рис. 4.10) в фиксированный момент времени совпадает по структуре с полем электростатического диполя той же длины.

4.1.3. Анализ поля элементарного электрического вибратора в дальней зоне

В дальней зоне ЭЭВ $kr \gg 1$, тогда из анализа рис. 4.6 следует, что

$$1/(kr)^3 \ll 1/(kr)^2 \ll 1/kr,$$

поэтому в выражении (4.10) оставляем только слагаемые, пропорциональные $1/kr$, а остальными можно пренебречь. В том числе пренебрегаем и составляющей \vec{E}_r , поскольку она не содержит множителя $1/kr$ и по своей величине значительно меньше составляющей \vec{E}_θ .

С учетом этого выражение (4.10) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_{m\varphi} = j\vec{\Phi}^\circ \frac{I_{m\text{CT}}lk}{4\pi r} \sin\theta e^{-jkr}; \\ \dot{\vec{E}}_{m\theta} = j\vec{\Theta}^\circ \frac{I_{m\text{CT}}lk^2}{4\pi\omega\varepsilon_a r} \sin\theta e^{-jkr} \end{cases}$$

или, учитывая выражения (2.67), (2.89)

$$k^2 = \frac{2\pi}{\lambda} \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a},$$

окончательно получаем выражения для составляющих ЭМП, создаваемого ЭЭВ в дальней зоне:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_{m\varphi} = j\vec{\Phi}^\circ \frac{I_{m\text{CT}}l}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}; \\ \dot{\vec{E}}_{m\theta} = j\vec{\Theta}^\circ \frac{I_{m\text{CT}}l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sin\theta e^{-jkr}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Умножив правую часть уравнений (4.12) на временной множитель $e^{j\omega t}$ и выполнив операцию Re от полученного выражения, получим мгновенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} в дальней зоне диполя Герца в вещественной форме записи:

$$\begin{cases} H_\varphi(t) = \frac{I_{m\text{CT}}l}{2\lambda r} \sin\theta \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2} + \varphi\right); \\ E_\theta(t) = \frac{I_{m\text{CT}}l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sin\theta \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2} + \varphi\right). \end{cases} \quad (4.13)$$

Из анализа выражения (4.13) следует, что

- ЭМП имеет две составляющие: E_θ – угломестную и H_φ – азимутальную. В любой точке дальней зоны векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны. Структура электрического поля в фиксированный момент времени приведена на рис. 4.11.

- Амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} убывают пропорционально расстоянию r ($H_\varphi \sim 1/r$ и $E_\theta \sim 1/r$). Физически это объясняется расходимостью ЭМВ в идеальной среде: по мере удаления от источника волна занимает все большую часть пространства. Такое сравнительно медленное убывание амплитуды поля позволяет осуществить передачу радиосигналов на большие расстояния.

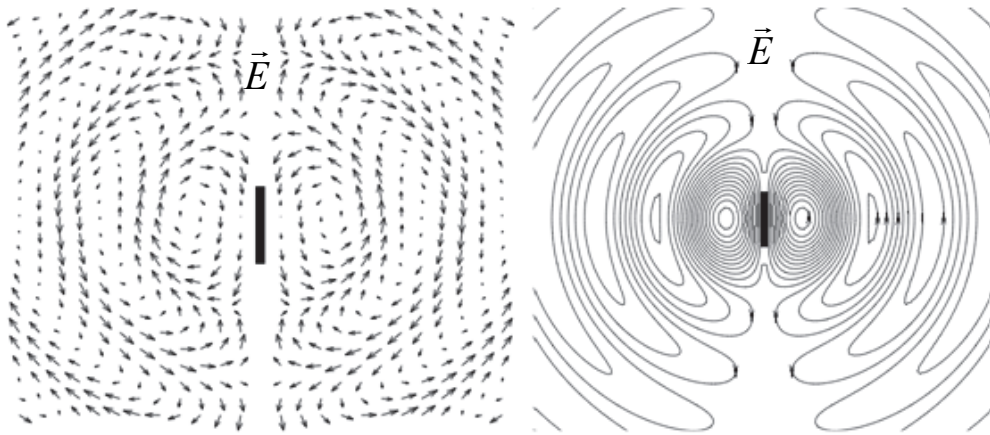


Рис. 4.11. Структура электрического поля в фиксированный момент времени

• Поскольку амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} обратно пропорциональны ($H_\varphi \sim 1/\lambda$ и $E_\theta \sim 1/\lambda$) длине волны, то для эффективной передачи сигналов необходимо применение высокочастотных сигналов.

• Отношение комплексных и действительных амплитуд электрического и магнитного полей является величиной постоянной, определяется только параметрами среды и называется *волновым (характеристическим) сопротивлением среды*, Ом, т. е.

$$\frac{\dot{E}_{m\theta}}{\dot{H}_{m\varphi}} = \frac{E_{m\theta}}{H_{m\varphi}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z. \quad (4.14)$$

Следовательно, в дальней зоне ЭЭВ амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} электромагнитного поля связаны между собой через волновое сопротивление среды

$$E_{m\theta} = H_{m\varphi} Z \text{ или } \dot{E}_{m\theta} = \dot{H}_{m\varphi} Z.$$

Для свободного пространства ($\epsilon = 1, \mu = 1$)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом},$$

а для произвольной среды без потерь ($\sigma = 0$)

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Подставив полученное выражение в (4.13), получим мгновенные значения напряженности электрического поля E в произвольной среде без потерь:

$$E(t) = \frac{60\pi I_{\text{мст}} l}{\lambda r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin\theta \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2} + \varphi\right). \quad (4.15)$$

• Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ в любой момент времени направлен по радиусу r от диполя в пространство, поскольку

$$\vec{\Pi}_r = [\vec{E}_\theta, \vec{H}_\varphi],$$

а в дальней зоне электрическое и магнитное поля синфазны.

• Волна, излучаемая диполем Герца, – сферическая, т. е. фронт волны¹³ – сфера. Докажем это утверждение, для чего приравняем фазу составляющих поля к некоторой постоянной величине

$$\omega t - kr + \frac{\pi}{2} = \text{const} \Rightarrow r = \frac{\omega t + \frac{\pi}{2} - \text{const}}{k}.$$

Полученное выражение определяет сферическую поверхность радиуса r .

• Скорость v_ϕ , с которой в пространстве перемещается фазовый фронт волны, называется фазовой скоростью. Она равна скорости распространения электромагнитной энергии, излучаемой ЭЭВ, и определяется в соответствии с выражением (2.88):

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}.$$

• В дальней зоне энергия ЭМП распределена поровну между электрическим и магнитным полями. Данный вывод следует из равенства объемных плотностей энергии электрического и магнитного полей:

$$\bar{\omega}_э = \frac{\epsilon_a E^2}{2} = \frac{\epsilon_a (H)^2}{2} \frac{\mu_a}{\epsilon_a} = \frac{\mu_a (H)^2}{2} = \bar{\omega}_м.$$

Промежуточная зона ЭЭВ ($kr \approx 1$) является переходной от ближней зоны к дальней. В этом случае при анализе в выражении (4.10) нельзя пренебречь ни одним из слагаемых, поскольку kr соизмерима с 1. Следовательно, в промежуточной зоне волновое (распространяющееся) и реактивное поля оказываются величинами одного порядка.

¹³ Фронтом волны называется поверхность, проходящая через точки пространства с одинаковой фазой напряженности электрического или магнитного поля и перпендикулярная к направлению распространения волны в каждой точке.

4.1.4. Направленные свойства элементарного электрического вибратора

Из анализа выражения (4.12) следует:

- амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} в дальней зоне ЭЭВ зависят от ряда величин, которые могут изменяться:
 - ❖ амплитуда тока $I_{m\text{ ст}}$;
 - ❖ частота тока ω ;
 - ❖ расстояние r до точек наблюдения;
 - ❖ угловые координаты θ и φ точек наблюдения;
- амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} максимальны в плоскости ($\theta = 90^\circ$), проходящей через середину вибратора перпендикулярно его оси, и равны нулю в направлении оси вибратора ($\theta = 0^\circ$; $\theta = 180^\circ$), т. е. излучение ЭЭВ является *направленным*.

Направленность излучения характеризуется специальным показателем, который называется *диаграммой направленности* (ДН). Диаграмма направленности бывает: по полю (амплитудная) и по мощности.

Диаграммой направленности антенны по полю $f(\theta, \varphi)$ называется зависимость амплитуды излучаемого поля E_m от пространственных углов θ и φ при постоянном расстоянии r до точек наблюдения и неизменных условиях возбуждения антенны.

Диаграммой направленности антенны по мощности $f^2(\theta, \varphi)$ называют зависимость плотности потока излучаемой мощности $\Pi(\theta, \varphi)$ от пространственных углов θ и φ при постоянном расстоянии r до точек наблюдения и неизменных условиях возбуждения антенны.

Диаграмма направленности может быть представлена как аналитически (в виде определенной формулы), так и графически (в виде поверхности).

Пространственная ДН, представляющая собой некоторую поверхность, неудобна для графического изображения. Поэтому на практике рассматривают ее сечения в плоскостях θ и φ . ДН, определяющие зависимость амплитуды поля излучателя только от одной угловой координаты, называются плоскостными и обозначаются $f(\theta)$ и $f(\varphi)$.

Для ЭЭВ диаграммы направленности имеют следующие аналитические зависимости, вытекающие из анализа (4.13):

- для плоскости «E» (электрической)

$$f(\theta) = C_E \sin(\theta),$$

- для плоскости «H» (магнитной)

$$f(\varphi) = C,$$

где $C_E = \frac{I_{мст} l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ – константа, определяющая максимальное значение амплитуды электрического поля;

$C = \frac{I_{мст} l}{2\lambda r}$ – константа, определяющая максимальное значение амплитуды магнитного поля.

Для удобства сравнения направленных свойств различных излучателей вводится понятие *нормированной* ДН по полю, определяемой отношением значения ДН $f(\theta, \varphi)$ в произвольном направлении к ее максимальному значению f_{\max} :

$$F(\theta, \varphi) = \frac{f(\theta, \varphi)}{f_{\max}} = \frac{E_m(\theta, \varphi)}{E_{m \max}}. \quad (4.16)$$

Максимальное значение нормированной ДН $F_{\max} = 1$.

Нормированная ДН по мощности:

$$F^2(\theta, \varphi) = \frac{\Pi_{ср}(\theta, \varphi)}{\Pi_{ср \max}} = \frac{E_m^2(\theta, \varphi)}{E_{m \max}^2}. \quad (4.17)$$

Для ЭЭВ нормированные ДН имеют следующие аналитические зависимости:

- для плоскости « E » (электрической)

$$F(\theta) = \sin(\theta), \quad (4.18)$$

- для плоскости « H » (магнитной)

$$F(\varphi) = 1. \quad (4.19)$$

Плоскостные ДН строятся либо в полярной, либо в прямоугольной системах координат.

На рис. 4.12 показаны нормированные ДН ЭЭВ в электрической (рис. 4.12, *a*) и магнитной (рис. 4.12, *б*) плоскостях, построенные в полярной и прямоугольной системах координат.

Из анализа (4.18), (4.19) и рис. 4.12 видно, что ЭЭВ обладает свойством направленного излучения только в электрической плоскости. При этом максимум излучения вибратора направлен под углом $\theta = 90^\circ$ к его оси. В этом случае вектор электрического поля \vec{E} оказывается параллельным оси вибратора. В направлении оси ($\theta = 0^\circ, 180^\circ$) излучения нет.

В качестве примера решим следующую задачу. Имеется (рис. 4.13) элементарный электрический вибратор длиной l и диаметром d , вдоль которого протекает гармонически изменяющийся во времени ток амплитуды $I_{мст}$.

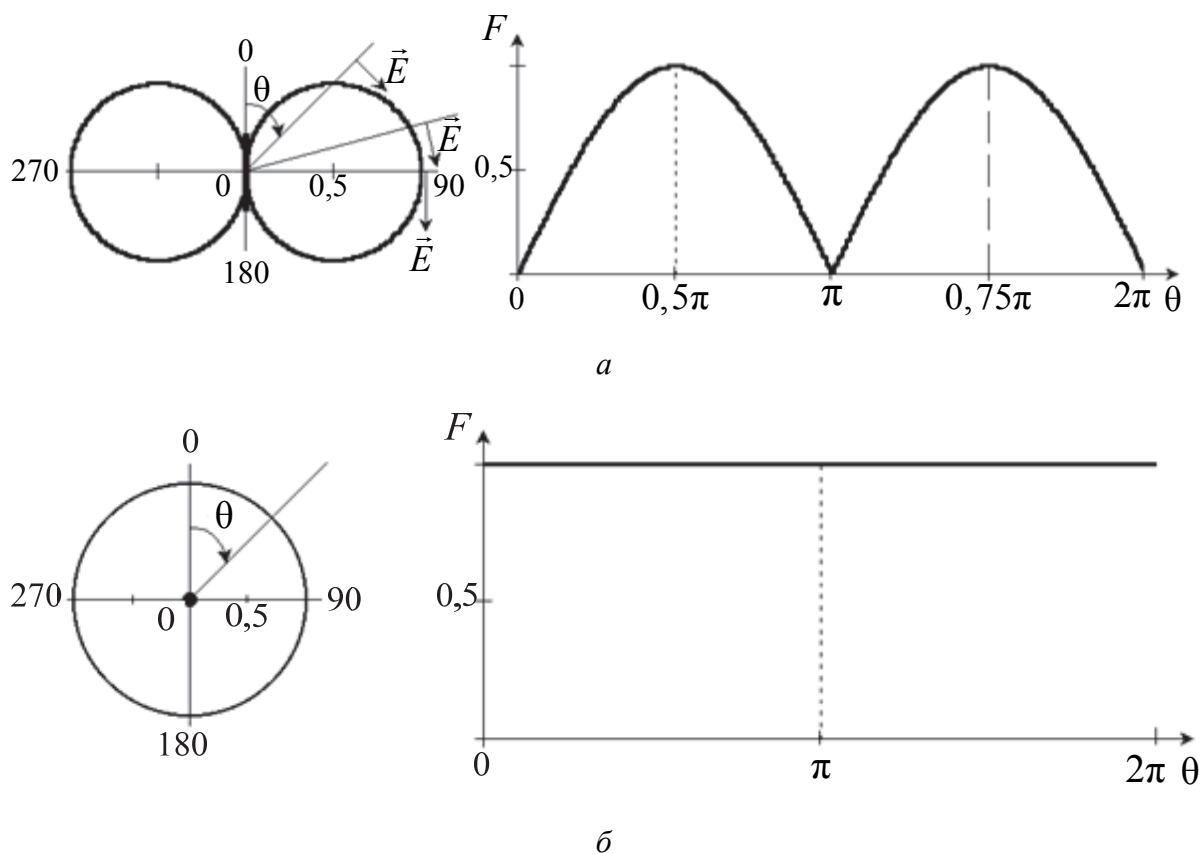
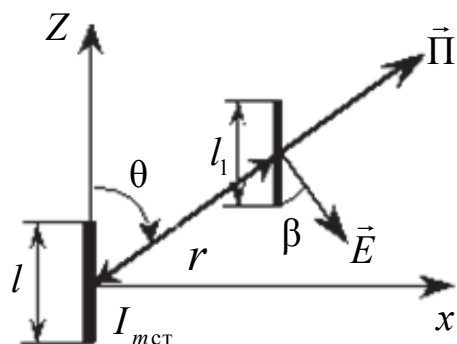


Рис. 4.12. Нормированные ДН ЭЭВ в электрической (а) и магнитной (б) плоскостях

Рис. 4.13. Элементарный электрический вибратор длиной l и диаметром d , расположенный в безграничной изотропной идеальной ($\sigma = 0$) среде



Вибратор расположен в безграничной изотропной идеальной ($\sigma = 0$) среде, характеризуемой параметрами ϵ_a и μ_a . Других источников ЭМП во всем пространстве, окружающем вибратор, нет. В точке наблюдения M с координатами θ , φ , удаленной от ЭЭВ на расстояние r , помещен приемный вибратор длиной l_1 . Угол между осью приемного вибратора и вектором \vec{E} излучаемого ЭМП составляет β .

Необходимо определить амплитуду e_m ЭДС, наводимой в приемном вибраторе при следующих значениях угла: $\beta = 0^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\beta = 90^\circ$.

Величину ЭДС, наводимую в приемном вибраторе, определим, исходя из определения ЭДС, в соответствии с (2.5), т. е.

$$e_m = \int_{l_1} \vec{E}_m d\vec{l},$$

где $\vec{E}_m = \vec{\theta}^\circ E_m$;

$$E_m = \frac{I_{m\text{ст}} l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin \theta - \text{амплитуда напряженности электрического поля,}$$

излучаемого ЭЭВ;

$$d\vec{l} = \vec{z}^\circ dl.$$

Перейдем от векторов под знаком интеграла к скалярам:

$$e_m = \int_{l_1} E_m \vec{\theta}^\circ \vec{z}^\circ dl = \int_{l_1} E_m \cos(\pi - \beta) dl = - \int_{l_1} E_m \cos(\beta) dl.$$

Поскольку амплитуда напряженности электрического поля E_m и угол β не зависят от dl , то

$$e_m = -E_m \cos(\beta) \int_{l_1} dl = -E_m l_1 \cos(\beta).$$

Подставляя значения угла β в полученное выражение, получаем

$$e_m(0) = -E_m l_1;$$

$$e_m(30) = -\frac{\sqrt{3}}{2} E_m l_1;$$

$$e_m(60) = -\frac{1}{2} E_m l_1;$$

$$e_m(90) = 0.$$

Следовательно, величина ЭДС, наводимой в приемном вибраторе, зависит от его ориентации относительно вектора напряженности излучаемого электрического поля \vec{E} и достигает своего максимального значения ($|e_m| = E_m l_1$) при $\beta = 0^\circ$.

Таким образом, из анализа результатов решения задачи и рис. 4.12 можно сделать следующий практически важный вывод:

Для обеспечения максимального приема необходимо, чтобы ось приемного вибратора была параллельна вектору излучаемого электрического поля \vec{E} .

На основании принципа (теоремы) взаимности рассмотренные ДН равнозначно принадлежат как передающим, так и приемным антеннам.

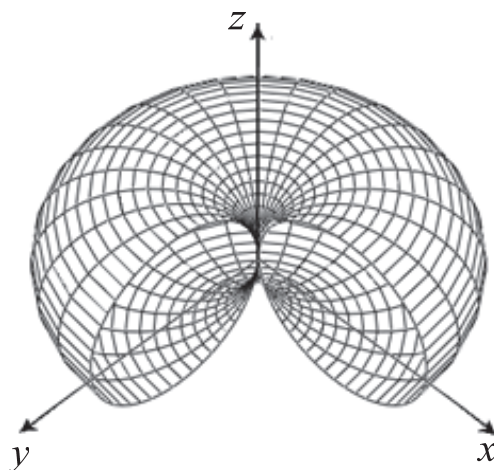


Рис. 4.14. Пространственная ДН элементарного электрического вибратора

По известным плоскостным ДН можно найти пространственную диаграмму направленности. Пространственная ДН ЭЭВ образует поверхность тора (рис. 4.14).

Она получается в результате вращения изображения диаграммы направленности $F(\theta)$ вокруг оси вибратора.

4.1.5. Мощность излучения элементарного электрического вибратора. Сопротивление излучения

Весьма важной характеристикой всех излучателей является мощность, которую они излучают.

Определим среднюю за период излучаемую мощность для ЭЭВ. Напомним, что согласно п. 3.2 под мощностью излучения P_Σ понимается усредненный за период колебания поля поток мощности, пронизывающий произвольную замкнутую поверхность S , охватывающую излучатель:

$$P_\Sigma = \oint_S \vec{\Pi}_{\text{cp}} d\vec{s}, \quad (4.20)$$

где $\vec{\Pi}_{\text{cp}}$ – значение вектора Пойнтинга, усредненное за период колебания T , определяемое в соответствии с выражениями (3.7) или (3.8).

Вычисление интеграла по замкнутому контуру S в (4.20) упрощается, если в качестве поверхности используется сфера с достаточно большим радиусом r , удовлетворяющим условию $kr \gg 1$. Тогда, в сферической системе координат (рис. 4.15):

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \vec{r}^\circ \Pi_{\text{cp}} \text{ и } d\vec{s} = \vec{r}^\circ ds,$$

где $ds = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$.

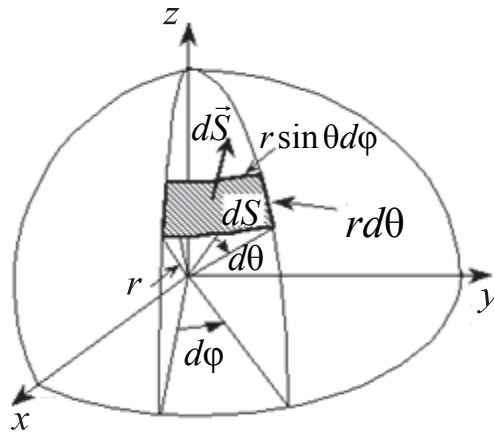


Рис. 4.15. Вычисление интеграла по замкнутому контуру S при использовании в качестве поверхности сферы с достаточно большим r радиусом

Среднее за период значение вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}_{cp}$ равно

$$\begin{aligned} \Pi_{cp} &= \frac{1}{T} \int_0^T \Pi(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_{\theta}(t) H_{\varphi}(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T E_{m\theta} H_{m\varphi} \cos^2\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) dt = \frac{E_{m\theta} H_{m\varphi}}{2} = \frac{E_{m\theta}^2}{2Z}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где E_m – амплитуда напряженности электрического поля в произвольной среде без потерь определяется в соответствии с (4.15).

С учетом выражений (4.21) и (4.15) формула (4.20) для расчета мощности излучения ЭЭВ P_{Σ} запишется в виде

$$\begin{aligned} P_{\Sigma} &= \oint_S \frac{\left(\frac{60\pi I_{mct} l}{\lambda r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin(\theta)\right)^2}{2Z} ds = \frac{r^2}{2Z} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{60\pi I_{mct} l}{\lambda r} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin(\theta)\right)^2 \sin(\theta) d\theta = \\ &= \frac{\left(\frac{60\pi I_{mct} l}{\lambda}\right)^2 \frac{\mu}{\epsilon}}{2Z} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{15\pi I_{mct}^2 l^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \text{ и } \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{4}{3},$$

то

$$P_{\Sigma} = \frac{15\pi I_{m\text{ст}}^2 l^2}{\lambda^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} 2\pi \frac{4}{3} = 40\pi^2 I_{m\text{ст}}^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (4.22)$$

Для свободного пространства ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$) формула (4.22) для расчета мощности излучения ЭЭВ P_{Σ} преобразуется к виду (в дальнейшем индекс «ст» опущен):

$$P_{\Sigma} = 40 \pi^2 I_m^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (4.23)$$

Используя выражение для эффективного (действующего) значения тока

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

получим еще одну формулу для расчета мощности излучения ЭЭВ P_{Σ} :

$$P_{\Sigma} = 80 \pi^2 I_{\text{эф}}^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (4.24)$$

Из анализа выражений (4.23) и (4.24) следует:

- с увеличением частоты ω (уменьшением длины λ волны) питающего ЭЭВ тока при прочих равных условиях растет излучаемая мощность;
- увеличение длины ЭЭВ l не приводит к увеличению мощности излучения P_{Σ} , так как при этом нарушается условие $l \ll \lambda$ элементарности электрического вибратора и полученные выражения становятся несправедливыми.

Зная мощность излучения ЭЭВ P_{Σ} , можно определить в точке наблюдения, находящейся на расстоянии r , амплитуду напряженности электрического поля E_m в произвольной среде без потерь. Так, из (4.23) для свободного пространства имеем

$$I_m \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P_{\Sigma}}{10}},$$

тогда, подставляя полученное выражение в (4.15), получим

$$E_m = \frac{60}{2r} \sqrt{\frac{P_{\Sigma}}{10}} \sin \theta = \frac{\sqrt{90P_{\Sigma}}}{r} \sin \theta. \quad (4.25)$$

Сравним (4.23) с выражением для мощности, расходуемой в электрической цепи (закон Джоуля-Ленца):

$$P_{\text{ср}} = \frac{I_m^2 R}{2}.$$

Тогда, не нарушая физической сущности рассматриваемого вопроса, формулу (4.23) можно представить в виде

$$P_{\Sigma} = \frac{I_m^2 R_{\Sigma}}{2},$$

где

$$R_{\Sigma} = \frac{P_{\Sigma}}{I_{\text{эф}}^2} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (4.26)$$

Выражение (4.26) определяет *сопротивление излучения* R_{Σ} ¹⁴, измеряемое в омах, которое характеризует активную мощность, излучаемую ЭЭВ в пространство.

Физический смысл сопротивления излучения

Если к источнику питания ЭЭВ подключить вместо R_{Σ} равное ему активное сопротивление, то при той же амплитуде тока в последнем выделится бы мощность, равная P_{Σ} излучаемой вибратором в окружающее пространство.

Из анализа выражения (4.26) можно сделать следующие выводы:

- чем больше величина сопротивления излучения R_{Σ} , тем больше мощность P_{Σ} , излучаемая ЭЭВ при том же токе;
- величина R_{Σ} зависит от соотношения l/λ и позволяет сравнивать эффективность разных излучателей: чем больше R_{Σ} , тем излучатель лучше;
- формула справедлива только для ЭЭВ, т. е. пока выполняется условие $l \ll \lambda$.

Сопротивление излучения является важным параметром не только элементарных излучателей, но и реальных антенн.

Таким образом, мы рассчитали и проанализировали поле, излучаемое диполем Герца, и рассмотрели основные свойства и параметры элементарного электрического вибратора.

4.2. Элементарный магнитный вибратор

Не каждый источник ЭМВ удобно представлять в виде совокупности электрических диполей. Если переменный ток течет по замкнутому контуру, то предпочтительнее применять его разложение на малые замкнутые витки.

Плоский замкнутый виток малого размера $l \ll \lambda$, по которому протекает переменный ток, амплитуда I_m и фаза φ_0 которого вдоль витка посто-

¹⁴ Сопротивлением излучения R_{Σ} называется отношение мощности излучения P_{Σ} к квадрату эффективного значения тока $I_{\text{эф}}$.

яны, называется элементарным магнитным вибратором (диполем), т. е. $\sqrt{S} = l \ll \lambda$; $I_m(l) = \text{const}$; $\varphi_0(l) = \text{const}$, где S – площадь витка.

Элементарный магнитный вибратор (элементарный магнитный диполь, элементарная рамка) изображается в соответствии с рис. 4.16, при этом форма витка может быть произвольной.

Из физических соображений ясно, что вдоль оси (oz на рис. 4.17), проходящей через центр витка перпендикулярно его плоскости, излучения не будет. Здесь каждому элементу контура витка с одним направлением тока противопоставляется равноудаленный элемент с противоположным током, и поля в точках оси взаимно компенсируются.

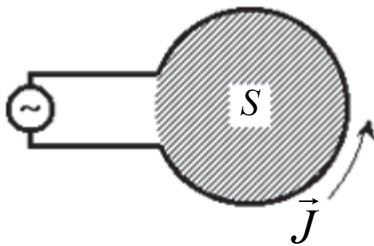


Рис. 4.16. Элементарный магнитный вибратор

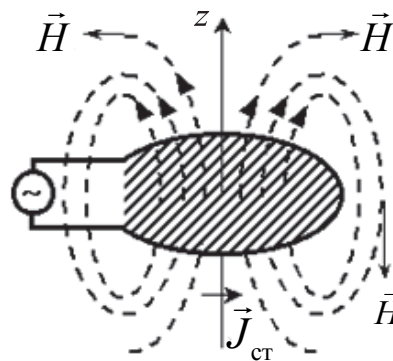


Рис. 4.17. Картина магнитного поля элементарного магнитного вибратора

Иная картина будет наблюдаться в точках плоскости витка: за счет хотя и небольшой, но конечной разности хода фазы напряженности электрического или магнитного полей, созданные противоположными элементами витка, различны и результирующее поле будет отлично от нуля.

По аналогии с ЭЭВ модель элементарного магнитного диполя можно представить, как изображено на рис. 4.18. Физическую модель элементарного магнитного диполя можно получить, если стержень выполнить из материала, например из феррита, с магнитной проницаемостью μ_1 , значительно большей магнитной проницаемости окружающей среды μ . В качестве возбуждающего устройства можно использовать рамку, обтекаемую током проводимости $J_{m \text{ ст}}$.

Определим поле элементарного магнитного вибратора, представленного на рис. 4.18 в дальней зоне.

Аналитические выражения для составляющих поля элементарного магнитного диполя в дальней зоне можно получить из (4.10), воспользовавшись преобразованиями по принципу перестановочной двойственности¹⁵ (2.59), т. е. произведя замену

¹⁵ Принцип перестановочной двойственности изложен в п. 2.9.2 настоящего учебника.

$$\vec{E} \Leftrightarrow \vec{H}; \epsilon_a \Leftrightarrow -\mu_a; \vec{J}_{\text{ст}} \Leftrightarrow -\vec{J}_M,$$

и учитывая, что для дальней зоны

$$1/(kr)^3 \ll 1/(kr)^2 \ll 1/kr.$$

Тогда составляющие поля магнитного диполя будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}}_{m\varphi} = j\vec{\varphi}^\circ \frac{\dot{I}_{Mm} l}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}; \\ \dot{\vec{H}}_{m\theta} = -j\vec{\theta}^\circ \frac{\dot{I}_{Mm} l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \sin\theta e^{-jkr}, \end{cases} \quad (4.27)$$

где $\dot{I}_M = -L\dot{E}_\tau$ – магнитный ток¹⁶, плотность которого $\vec{J}_M = -[\vec{n}^\circ, \vec{E}_\tau]$;

\dot{E}_τ – тангенциальная составляющая напряженности электрического поля, распределенная на поверхности магнитного вибратора (рис. 4.18).

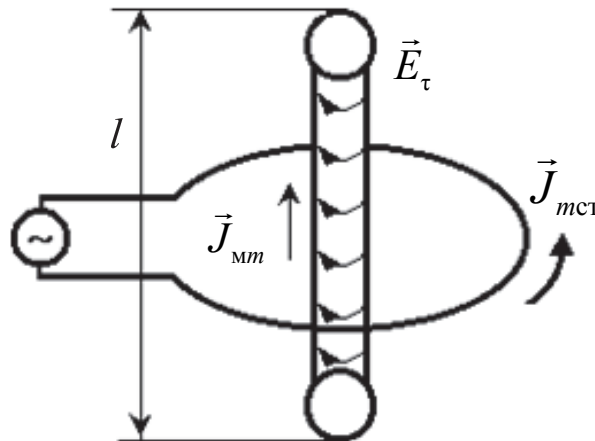


Рис. 4.18. Модель элементарного магнитного диполя

Из анализа выражения (4.27) следует, что:

- поле, создаваемое элементарным магнитным вибратором в дальней зоне, представляет собой сферическую волну, распространяющуюся от вибратора со скоростью v_ϕ , определяемой в соответствии с (2.88);
- векторы \vec{E} и \vec{H} изменяются в фазе, перпендикулярны друг другу и направлению $\vec{\Pi}$ распространения ЭМВ (рис. 4.19);

¹⁶ Понятие магнитного тока, по существу, является формальным, однако его введение в ряде случаев позволяет существенно облегчить анализ структуры поля сложных систем.

- отношение амплитуд электрического $\dot{E}_{m\varphi}$ и магнитного $\dot{H}_{m\theta}$ полей равно характеристическому Z (волновому) сопротивлению среды, определяемому в соответствии с (4.14);
- элементарный магнитный вибратор обладает направленными свойствами. Его излучение максимально в азимутальной плоскости при $\theta = 90^\circ$, а вдоль своей оси ($\theta = 0^\circ$) вибратор не излучает.

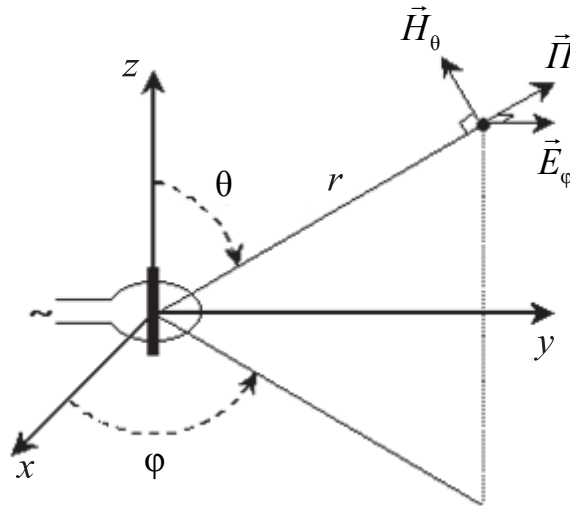


Рис. 4.19. Взаимное расположение векторов \vec{E} и \vec{H} в поле, создаваемом элементарным магнитным вибратором в дальней зоне

Если в схеме на рис. 4.18 изъять ферритовый стержень, то характер структуры поля практически не изменится (рис. 4.17). На основе данного факта плоский замкнутый виток малого размера может рассматриваться как элементарный магнитный вибратор. В этом случае вибратор характеризуется током в рамке I и ее площадью S .

Для определения ЭМП, создаваемого рамкой, необходимо по аналогии с ЭЭВ.

1. Определить выражение (аналог (4.1)) для векторного потенциала кольцевого электрического тока \vec{A} .

2. Вычислить объемный интеграл (в соответствии с формулой Кирхгофа), входящий в выражение для \vec{A} , при условии, что расстояние r от рамки до точки наблюдения M гораздо больше размеров рамки, т. е. $r \gg \sqrt{S}$.

3. Найти вектор \vec{H} по известному \vec{A} в соответствии с выражением (2.73).

4. Определить вектор \vec{E} по известному \vec{H} в соответствии с первым уравнением Максвелла (2.46).

Сравнение окончательных выражений для поля, создаваемого рамкой, с формулами (4.27) для поля элементарного магнитного вибратора показывает, что они переходят друг в друга при замене следующего вида:

$$\dot{I}_{m l} \rightleftharpoons j\omega\mu_a \dot{I}_m S,$$

т. е. поле, создаваемое рамкой в дальней зоне, определяется как

$$\begin{cases} \dot{E}_{m\varphi} = \vec{\varphi}^\circ \frac{\omega\mu_a \dot{I}_m S}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}; \\ \dot{H}_{m\theta} = -\vec{\theta}^\circ \frac{\omega\mu_a \dot{I}_m S}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \sin\theta e^{-jkr}. \end{cases} \quad (4.28)$$

После преобразования (4.28) с учетом

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$$

окончательно получаем выражения для составляющих ЭМП, создаваемого рамкой в дальней зоне:

$$\begin{cases} \dot{E}_{m\varphi} = \vec{\varphi}^\circ \frac{\dot{I}_m \cdot S \cdot k}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin\theta e^{-jkr}; \\ \dot{H}_{m\theta} = -\vec{\theta}^\circ \frac{\dot{I}_m \cdot S \cdot k}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Из анализа выражения (4.29) следует:

- амплитуда ЭМП, создаваемого элементарной рамкой, зависит от угла θ , значит, элементарная рамка так же, как и ЭЭВ, обладает направленностью излучения;
- вектор \vec{E} лежит в плоскости рамки (рис. 4.19) (сравните с положением \vec{E} относительно ЭЭВ);
- нормированная ДН элементарной рамки в плоскости «E» (рис. 4.20, а) – $F(\varphi) = 1$;
- вектор \vec{H} лежит в плоскости, перпендикулярной рамке (рис. 4.19) (сравните с положением \vec{E} относительно ЭЭВ);
- нормированная ДН элементарной рамки в плоскости «H» (рис. 4.20, б) – $F(\theta) = \sin(\theta)$;
- элементарная рамка вдоль оси, проходящей через центр витка перпендикулярно его плоскости, не излучает. Максимальное излучение – в плоскости рамки.

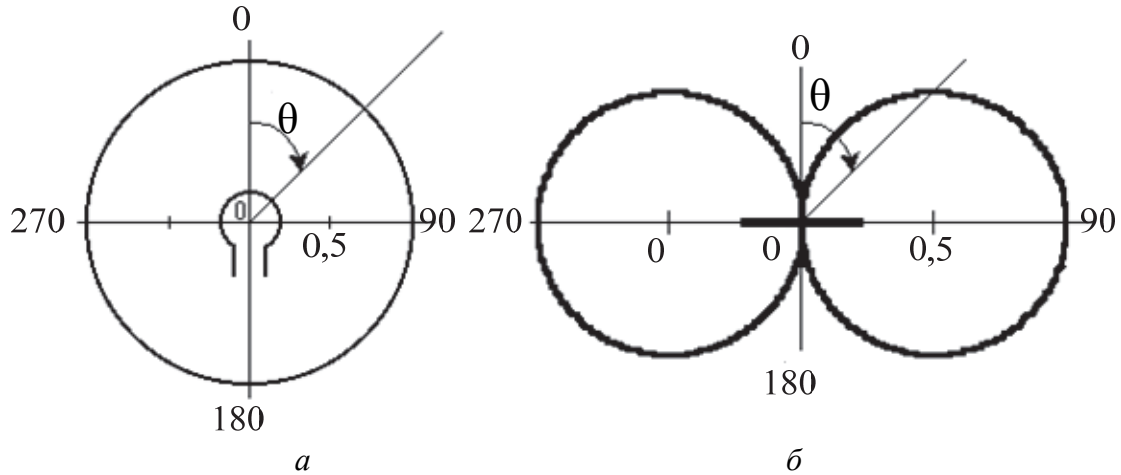


Рис. 4.20. Нормированная ДН элементарной рамки: *a* – в плоскости «*E*», *b* – в плоскости «*H*»

Мощность излучения элементарного магнитного вибратора $P_{\Sigma м}$ (элементарной рамки) находится так же, как мощность излучения ЭЭВ P_{Σ} , и в свободном пространстве определяется как

$$P_{\Sigma м} = 160\pi^4 \dot{I}_m^2 \frac{S^2}{\lambda^4} = 10\pi^2 \dot{I}_m^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \quad (4.30)$$

или, используя выражение для эффективного (действующего) значения тока,

$$P_{\Sigma м} = 320\pi^4 \dot{I}_{\text{эф}}^2 \frac{S^2}{\lambda^4} = 20\pi^2 \dot{I}_{\text{эф}}^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4. \quad (4.31)$$

Используя соотношение

$$R_{\Sigma} = \frac{P_{\Sigma}}{I_{\text{эф}}^2},$$

получим выражение для сопротивления $R_{\Sigma м}$ излучения элементарного магнитного вибратора (элементарной рамки) в свободном пространстве:

$$R_{\Sigma м} = 320\pi^4 \frac{S^2}{\lambda^4} = 20\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4. \quad (4.32)$$

Сравним излучающие способности ЭЭВ и элементарного магнитного вибратора (элементарной рамки), для чего сравним их сопротивления излучения:

$$\frac{R_{\Sigma}}{R_{\Sigma м}} = 4 \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2.$$

Из анализа полученного выражения следует, что ЭЭВ как излучатель ЭМВ лучше элементарного магнитного вибратора (элементарной рамки), поскольку $R_{\Sigma} > R_{\Sigma м}$.

Определим, во сколько ЭЭВ излучает больше мощности при прочих равных условиях, чем магнитный вибратор. Например, пусть $l / \lambda = 0,05$, тогда

$$\frac{P_{\Sigma}}{P_{\Sigma м}} = 4 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 = 1\,600,$$

т. е. в 1 600 раз мощность излучения элементарного электрического вибратора больше мощности излучения элементарного магнитного вибратора.

Относительно малое излучение энергии рамкой можно объяснить физически. С этой целью рассмотрим (рис. 4.21) два симметричных элемента рамки dl_1 и dl_2 . В некоторый фиксированный момент времени t элемент рамки dl_1 создает в некоторой точке M дальней зоны напряженность поля \vec{E}_1 , а элемент dl_2 – напряженность поля \vec{E}_2 . Так как токи в элементах рамки направлены в противоположных направлениях, то и векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в точке M тоже должны быть направлены в разные стороны. Однако с учетом того, что волны, излучаемые элементами dl_1 и dl_2 , в точку наблюдения M проходят различные (на величину Δr) расстояния, то разность фаз между векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 будет отличаться от π на величину $k\Delta r$. Следовательно, результирующее поле $\vec{E}_{рез}$ не равно нулю, хотя и будет очень малым (из-за малости величины Δr).

Если произвести аналогичный анализ для ЭЭВ, то поля, создаваемые элементами dl_1 и dl_2 в точке наблюдения M , будут складываться практически в фазе.

Поэтому рамочные (магнитные) антенны в качестве излучателей ЭМП применяются на практике значительно реже, чем электрические вибраторы.

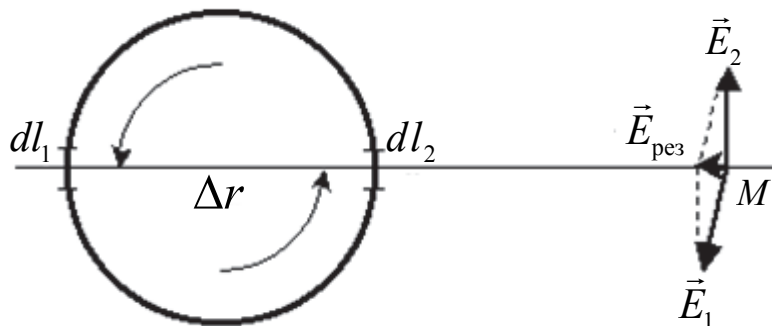


Рис. 4.21. К анализу результирующего электрического поля $\vec{E}_{рез}$ создаваемого элементом рамки в некоторой точке M дальней зоны

Направленные свойства рамочных антенн позволяют использовать их для определения направления прихода ЭМВ (направления на радиостанцию). Например, если перпендикуляр к плоскости рамки совпадает с направлением распространения радиоволны, то ЭДС, наводимая в рамке, равна нулю (пеленгация по минимуму сигнала).

Кроме того, применение рамочной антенны позволяет определять угол θ , с которой приходит ЭМВ. Это обусловлено тем, что ЭДС, индуцированная в рамке волной, приходящей с правого ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) полупространства (рис. 4.20, б), отличается на π от ЭДС, индуцированной волной, приходящей с левого ($180^\circ < \theta < 360^\circ$) полупространства.

4.3. Поле элемента фазового фронта волны (элемента Гюйгенса)

При анализе конкретных излучающих систем распределение токов в системе часто либо неизвестно, либо имеет крайне сложный характер, но зато можно считать известным поле на некоторой замкнутой поверхности, охватывающей излучающую систему. В этих случаях поле, излучаемое системой, можно найти непосредственно по значениям векторов \vec{E} и \vec{H} на этой поверхности, воспользовавшись принципом Гюйгенса¹⁷.

Принцип Гюйгенса заключается в том, что всякая точка среды ds , которой достиг волновой фронт, созданный каким-либо первичным источником, является вторичным элементарным источником сферической волны. Новый фронт волны представляет собой огибающую всех возникших элементарных волн (рис. 4.22).

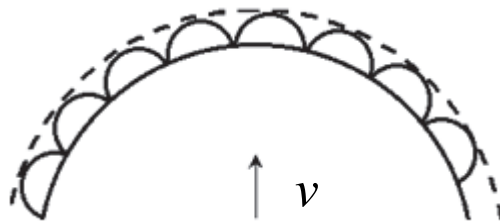


Рис. 4.22. Фронт сферической волны

Таким образом, под элементом Гюйгенса понимается элемент фронта плоской волны ds , размеры которого значительно меньше длины λ волны, т. е. $ds \ll \lambda$.

¹⁷ Х. Гюйгенс – голландский физик-математик (1629–1695), рассматривая вопрос о распространении волнового фронта световой волны, установил принцип, позволяющий по данному положению волнового фронта найти его положение в последующие моменты.

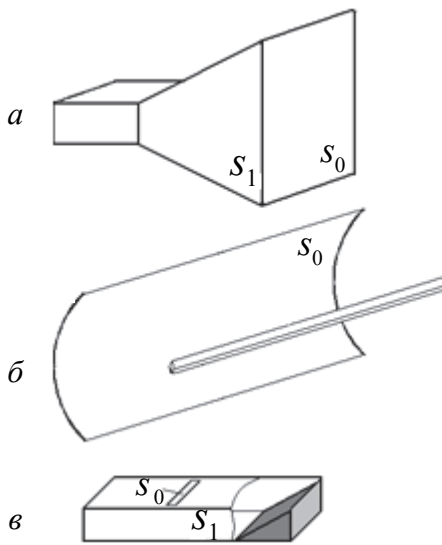


Рис. 4.23. Основные типы антенн СВЧ-диапазона: *а* – рупорные; *б* – зеркальные; *в* – щелевые

Поле в точке наблюдения, лежащей вне объема, можно найти как результат суммирования (интегрирования) полей, создаваемых вторичными элементарными источниками. Строгую математическую формулировку рассматриваемого принципа в 1882 г. дал Кирхгоф (выражение (2.97)).

Принцип Гюйгенса широко применяется при расчете диаграмм направленности различных излучающих систем СВЧ-диапазона. Основные типы антенн этого диапазона – рупорные (рис. 4.23, *а*), зеркальные (рис. 4.23, *б*) и щелевые (рис. 4.23, *в*) – можно представить в виде замкнутой поверхности, одна часть которой S_1 является металлической, а другая S_0 представляет собой поверхность раскрыва

(через нее электромагнитная энергия излучается в окружающее пространство), на которой поле обычно известно с той или иной степенью точности.

Задача, таким образом, в общем виде состоит в следующем. Пусть первичные источники поля $\dot{J}_{\text{ст}}$ и $\dot{\rho}_{\text{ст}}$ сосредоточены в ограниченной области V (рис. 4.24). Характер источников, их вид и расположение неизвестны или выражаются сложной математической зависимостью, но зато известны значения векторов \vec{E} и \vec{H} на внешней по отношению к источникам стороне поверхности S , ограничивающей объем V .

Поверхность S может быть как действительной поверхностью раздела различных сред, так и воображаемой, важно только, что на ней задано поле \vec{E} и \vec{H} . Требуется найти поле вне области V .

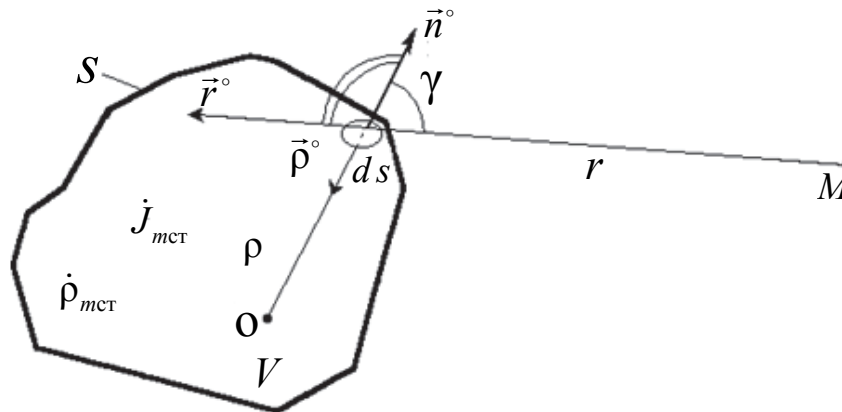


Рис. 4.24. Нахождение поля первичных источников в точках, не охватываемых замкнутой поверхностью S

В этом случае для нахождения поля в точках, не охватываемых замкнутой поверхностью S , используется скалярная формула (2.97) Кирхгофа (см. п. 2.10.7), которая для гармонических полей имеет вид:

$$\dot{U}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\partial \dot{U}_{ms}}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \dot{U}_{ms} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] ds,$$

где $\dot{U}_m(M)$ – комплексная амплитуда векторов поля \vec{H} , \vec{E} , \vec{A} , \vec{Z} в точке наблюдения M ;

\dot{U}_{ms} – комплексная амплитуда векторов поля на поверхности S в месте расположения элемента Гюйгенса ds ;

r – расстояние от точки M до элемента Гюйгенса ds ;

\vec{n}° – нормаль к элементу Гюйгенса ds .

Чтобы использовать эту формулу для расчета поля в точке M , необходимо знать амплитуду поля на волновой поверхности \dot{U}_{ms} .

Рассмотрим случай, когда первичным источником в точке O (рис. 4.24) является элементарный электрический вибратор. Тогда комплексная амплитуда напряженности электрического поля на волновой поверхности S согласно выражению (4.12) равна

$$\dot{U}_{ms} = \dot{E}_{m\theta} = j \frac{I_{mct} l}{2\lambda\rho} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin\theta e^{-jk\rho} = \frac{C}{\rho} e^{-jk\rho}, \quad (4.33)$$

где $C = j \frac{I_{mct} l}{2\lambda\rho} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin\theta$ – некоторая постоянная величина;

ρ – расстояние от излучателя до элемента поверхности ds .

Вычислим производные, входящие под знак интеграла формулы Кирхгофа с учетом обозначений, принятых на рис. 4.24.

Производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \cos \left(\vec{n}^\circ, \hat{r}^\circ \right) = - \left(\frac{jk}{r} e^{-jkr} + \frac{e^{-jkr}}{r^2} \right) \cos \left(\vec{n}^\circ, \hat{r}^\circ \right) = \\ &= \left(\frac{jk}{r} e^{-jkr} + \frac{e^{-jkr}}{r^2} \right) \cos \gamma, \end{aligned}$$

так как в соответствии с рис. 4.24

$$\cos \left(\vec{n}^\circ, \hat{r}^\circ \right) = \cos (180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma.$$

Производная

$$\frac{\partial \dot{U}_{ms}}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{C}{\rho} e^{-jk\rho} \right) = \left(C \frac{jk}{\rho} e^{-jk\rho} + C \frac{e^{-jk\rho}}{\rho^2} \right).$$

Обычно поле определяется на больших расстояниях от источника (в дальней зоне), поэтому в последних выражениях слагаемыми, пропорциональными $1/r^2$ и $1/\rho^2$, можно пренебречь ввиду их малости. Тогда формула Кирхгофа приобретает вид

$$\dot{E}_m(M) = j \frac{kC}{4\pi} \oint_S \frac{e^{-jk(\rho+r)}}{\rho r} (1 + \cos \gamma) ds. \quad (4.34)$$

Таким образом, выражение (4.34) характеризует в точке M наблюдения суммарный (интегральный) эффект вторичных источников, расположенных на поверхности S .

Очевидно, что элементарная площадка ds (элемент Гюйгенса) создает электрическое поле амплитуды:

$$d\dot{E}_m(M) = j \frac{kC}{4\pi} \frac{e^{-jk(\rho+r)}}{\rho r} (1 + \cos \gamma) ds. \quad (4.35)$$

Из анализа выражения (4.35) следует:

- наличие множителя $e^{-jk(\rho+r)}$ свидетельствует о том, что элемент ds фазового фронта волны (элемент Гюйгенса) создает сферическую волну;
- наличие множителя $(1 + \cos \gamma)$ показывает, что элемент Гюйгенса обладает направленными свойствами. Нормированная ДН элемента ds фазового фронта волны аналитически выражается формулой

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2} \quad (4.36)$$

и имеет вид кардиоиды (рис. 4.25). Пространственная ДН элементарной площадки (рис. 4.26) представляет собой поверхность, образующуюся при вращении кардиоиды вокруг ее оси симметрии (оси oz);

- из рис. 4.25 и 4.26 видно, что максимальное излучение имеет место в направлении распространения ЭМВ, т. е. в направлении оси z , перпендикулярной к элементарной площадке ds Гюйгенса. В обратном направлении излучения электромагнитной энергии нет.

Комплексную амплитуду напряженности магнитного поля $\dot{H}_m(M)$ в точке наблюдения и величину $d\dot{H}_m(M)$ можно найти, подставляя в формулу Кирхгофа вместо \dot{U}_{ms} значение $\dot{H}_{m\phi}$ из выражения (4.12).

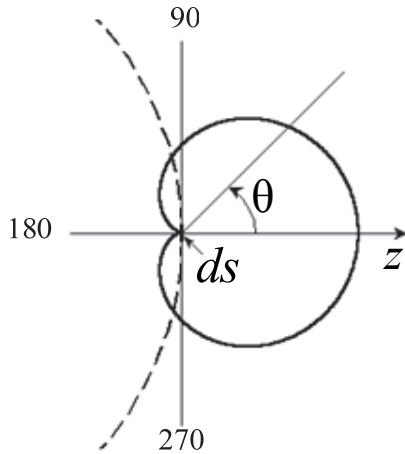


Рис. 4.25. Нормированная ДН элемента ds фазового фронта волны

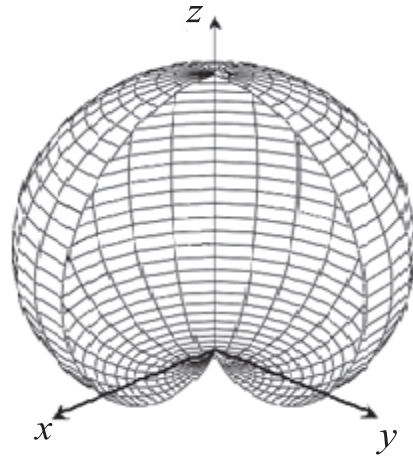
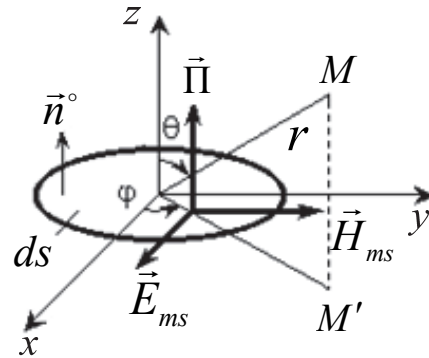


Рис. 4.26. Пространственная ДН элементарной площадки

Рис. 4.27. Элемент Гюйгенса ds в сферической системе координат



Поле излучения, создаваемое элементарной площадкой ds Гюйгенса, можно также определить, воспользовавшись векторной формулой Кирхгофа (см. п. 2.10.7) для векторов \vec{E} и \vec{H} .

Расположим элемент ds Гюйгенса в сферической системе координат (рис. 4.27). Тогда согласно рис. 4.27

$$\vec{E}_{ms} = \vec{x}^\circ E_{ms}; \quad \vec{H}_{ms} = \vec{y}^\circ H_{ms} \quad \text{и} \quad \vec{n}^\circ = \vec{z}^\circ.$$

Для определения вектора \vec{E} напряженности электрического поля, создаваемого элементом ds Гюйгенса в дальней зоне ($r \gg \lambda$), воспользуемся выражением (2.98):

$$\dot{\vec{E}}_m(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\left[\vec{n}^\circ, \dot{\vec{E}}_{ms} \right] \nabla \frac{e^{-jkr}}{r} + \left(\vec{n}^\circ \dot{\vec{E}}_{ms} \right) \nabla \frac{e^{-jkr}}{r} - j\omega\mu_a \frac{e^{-jkr}}{r} \left[\vec{n}^\circ, \dot{\vec{H}}_{ms} \right] \right) d\vec{s},$$

где $\nabla = \vec{r}^\circ \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\theta}^\circ \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{\varphi}^\circ \frac{\partial}{\partial \varphi}$ – векторный оператор набла (оператор Гамильтона) в сферической системе координат.

После преобразования с учетом введенных выше допущений получим, что электрическое поле, создаваемое элементом ds Гюйгенса, в дальней зоне имеет две поперечные составляющие:

$$\dot{\vec{E}}_{m\theta} = \bar{\theta}^\circ j \frac{k\dot{E}_{ms}}{4\pi r} (1 + \cos(\theta)) \cos(\varphi) e^{-jkr} ds; \quad (4.37)$$

$$\dot{\vec{E}}_{m\varphi} = -\bar{\varphi}^\circ j \frac{k\dot{E}_{ms}}{4\pi r} (1 + \cos(\theta)) \sin(\varphi) e^{-jkr} ds. \quad (4.38)$$

Амплитуда результирующего вектора $\vec{E}_m = \vec{E}_{m\theta} + \vec{E}_{m\varphi}$ в точке наблюдения M определяется как

$$\dot{E}_m = \sqrt{E_{m\theta}^2 + E_{m\varphi}^2} = j \frac{k\dot{E}_{ms}}{4\pi r} (1 + \cos(\theta)) e^{-jkr} ds.$$

Полученное выражение аналогично формуле (4.35), что подтверждает правильность решения задачи по определению поля излучения, создаваемого элементарной площадкой ds Гюйгенса, в дальней зоне.

4.4. Элементарная щель

Излучатели электромагнитной энергии, представляющие собой узкие щели, прорезанные в стенках волновода, резонатора, коаксиальной или полосковой линии передачи, называются щелевыми излучателями.

Форма излучателей может быть прямолинейной (1, 2, 3), уголковой (4), гантельной (5) и крестообразной (6) (рис. 4.28).

Идея использования щелевых излучателей в антенных системах принадлежит М.А. Бонч-Бруевичу и М.С. Нейману. Существенный вклад в теорию щелевых антенн внесли советские ученые А.А. Пистолькорс и Я.Н. Фельд.

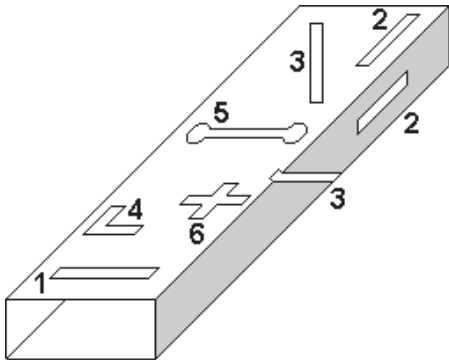


Рис. 4.28. Формы излучателей, прорезанных в стенках волновода: 1, 2, 3 – прямолинейные; 4 – уголкового; 5 – гантельные; 6 – крестообразные

Расчет и анализ щелевых излучателей базируются на использовании принципа двойственности (см. п. 2.9.2), вытекающего из перестановочной двойственности уравнений Максвелла.

Принцип двойственности, сформулированный применительно к антеннам А.А. Пистолькорсом, гласит следующее.

Решение уравнений Максвелла для магнитного поля, найденное при данных граничных условиях, справедливо и для электрического поля, если в граничных условиях эти поля поменять местами. При этом достаточно сравнивать граничные условия для тангенциальных составляющих полей, поскольку, как следует из теоремы единственности решения уравнений Максвелла, задание на заданной поверхности S тангенциальных E_τ или H_τ составляющих обеспечивает однозначность решения уравнений поля.

Применим принцип двойственности для расчета поля элементарного щелевого излучателя. Элементарная щель представляет собой бесконечно малую (по сравнению с λ) щель, прорезанную в плоском тонком идеально проводящем безграничном экране, т. е. $d \ll \lambda$ и $l \ll \lambda$ (рис. 4.29, а).

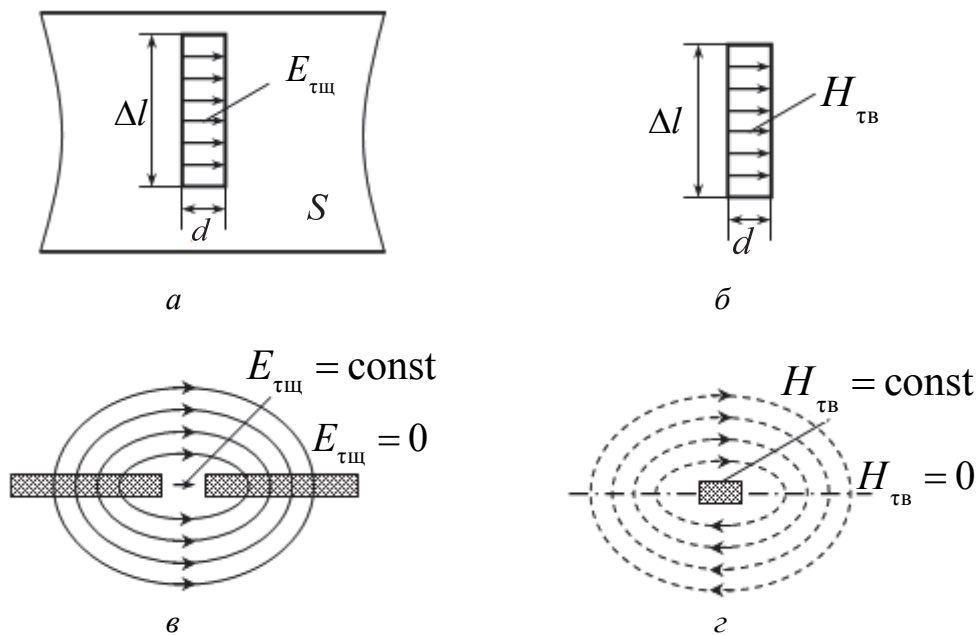


Рис. 4.29. Применение принципа двойственности для расчета поля элементарного щелевого излучателя: а – элементарная щель; б – структура магнитного поля вблизи вибратора; в – тангенциальная составляющая электрического поля щели; г – тангенциальная составляющая магнитного поля

Одновременно с элементарным щелевым излучателем будем рассматривать элементарный вибратор в виде металлической бесконечно тонкой пластинки с такими же размерами, что и размеры щели (рис. 4.29, б).

Применим принцип двойственности для расчета поля элементарного щелевого излучателя. Структура магнитного поля вблизи вибратора

(рис. 4.29, б) определяется в соответствии с первым уравнением (2.3) Максвелла в интегральной форме, которое с учетом того что ЭЭВ представлен в виде металлической бесконечно тонкой пластинки, имеет вид

$$\oint_{\Delta l} \vec{H} d\vec{l} = \int_d \vec{J}_s d\vec{l} = I,$$

где J_s – плотность поверхностного тока проводимости;

I – полный ток;

d – ширина пластинки;

откуда

$$J_s d = I \text{ или } J_s = \frac{I}{d},$$

однако в связи с тем, что ток I течет по обе стороны бесконечно тонкой металлической пластинки, то

$$J_s = \frac{I}{2d}.$$

В соответствии с полученным выражением и граничными условиями (выражение (2.43)) на границе раздела «идеальный проводник – воздух» рис. 4.29, з) тангенциальная составляющая магнитного поля ЭЭВ на металлической пластинке

$$H_{\text{тв}} = J_s = \frac{I}{2d} = \text{const.} \quad (4.39).$$

На остальной части бесконечной плоскости, являющейся продолжением плоскости вибратора

$$H_{\tau} = 0.$$

Тангенциальная составляющая электрического поля щели (рис. 4.29, в) на самой щели

$$E_{\tau \text{ щ}} = \frac{U}{d} = \text{const}, \quad (4.40)$$

где U – напряжение между краями щели, а на остальной части бесконечной плоскости (металлическом экране)

$$E_{\tau \text{ щ}} = 0.$$

Анализ выражений (4.39) и (4.40) граничных условий для H_{τ} вибратора и E_{τ} щели с точностью до постоянного коэффициента совпадают. Следовательно, для расчета поля щели воспользуемся принципом двойственности Пистолькорса.

Поле ЭЭВ в дальней зоне определяется соотношениями (4.12), которые с учетом обозначений на рис. 4.29 имеют вид

$$\begin{cases} \dot{H}_{m\varphi}^B = j \frac{\dot{I}_m \Delta l}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}; \\ \dot{E}_{m\theta}^B = j \frac{\dot{I}_m \Delta l}{2\lambda r} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sin\theta e^{-jkr}. \end{cases}$$

С учетом выражения (4.39) соотношение для составляющей магнитного поля можно записать в виде

$$\dot{H}_{m\varphi}^B = j \frac{\dot{H}_{m\tau B} d \Delta l}{\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}. \quad (4.41)$$

Заменяя в (4.41) в соответствии с принципом перестановочной двойственности $\dot{H}_{m\varphi}^B \Leftrightarrow \dot{E}_{m\varphi}^{\text{ш}}$ и $E_{m\tau\text{ш}} \Leftrightarrow H_{m\tau B}$ найдем поле, создаваемое элементарной щелью в дальней зоне:

$$\dot{E}_{m\varphi}^{\text{ш}} = j \frac{\dot{E}_{m\tau\text{ш}} d \Delta l}{\lambda r} \sin\theta e^{-jkr} = j \frac{\dot{U}_m \Delta l}{\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}; \quad (4.42)$$

$$\dot{H}_{m\theta}^{\text{ш}} = j \frac{\dot{U}_m \Delta l}{\lambda r} \sqrt{\frac{\varepsilon_a}{\mu_a}} \sin\theta e^{-jkr}. \quad (4.43)$$

Из анализа выражений (4.42), (4.43) и (4.12) следует:

- ЭМП имеет две составляющие: H_θ – угломестная и E_φ – азимутальная. В любой точке дальней зоны векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны (рис. 4.30);
- вектор $\vec{\Pi}$ Пойнтинга в любой момент времени направлен по радиусу r от элементарной щели в пространство

$$\vec{\Pi}_r = [\vec{E}_\theta, \vec{H}_\varphi];$$

- волна, излучаемая элементарной щелью, – сферическая;
- магнитная плоскость (плоскость « H ») перпендикулярна плоскому тонкому идеально проводящему безграничному экрану и проходит через центр элементарной щели. Электрическая плоскость (плоскость « E ») параллельна плоскому тонкому идеально проводящему безграничному экрану;
- диаграммы направленности элементарного вибратора и элементарной щели совпадают. Меняются лишь местами электрическая и магнитная плоскости: для элементарной щели нормированные ДН имеют следующие аналитические зависимости:

- для плоскости « E » (электрической)

$$F(\varphi) = 1; \quad (4.44)$$

- для плоскости « H » (магнитной)

$$F(\theta) = \sin(\theta). \quad (4.45)$$

На рис. 4.31 показаны нормированные ДН ЭЭВ в магнитной (рис. 4.31, *a*) и электрической (рис. 4.31, *б*) плоскостях.

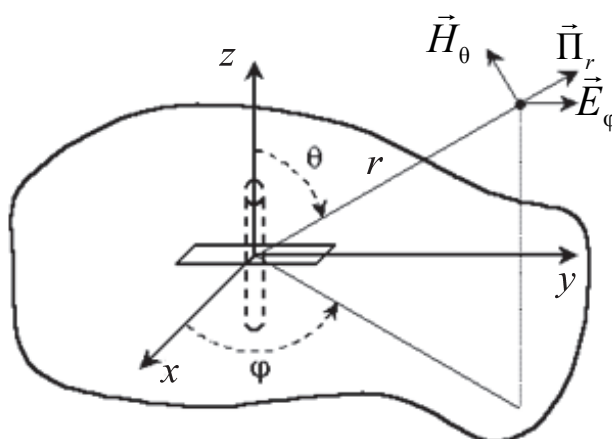


Рис. 4.30. Положение составляющих векторов ЭМП \vec{E} и \vec{H} , создаваемых элементарной щелью в любой точке дальней зоны

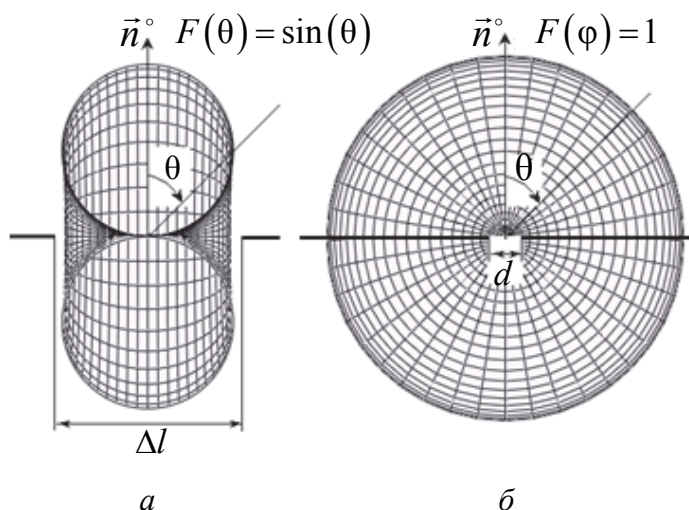


Рис. 4.31. Нормированные ДН ЭЭВ в: *a* – магнитной; *б* – электрической плоскостях

Из анализа выражений (4.44), (4.45) и рис. 4.31 видно, что элементарная щель обладает свойством направленного излучения только в магнитной плоскости.

Глава 5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

5.1. Плоские электромагнитные волны в однородной, изотропной, непроводящей среде

В предыдущей главе были рассмотрены электромагнитные волны, создаваемые элементарными источниками излучения. Выяснено, что эти волны являются сферическими, т. е. их поверхности равных фаз представляют собой сферы с центром в точке расположения элементарного источника излучения ЭМВ. Отметим, что волны, создаваемые любой излучающей системой, на большом расстоянии от нее являются сферическими.

Пусть в безграничной однородной, изотропной¹⁸, непроводящей среде ($\sigma = 0$) с параметрами ϵ и μ распространяется сферическая волна. Рассмотрим поле в некоторой области V (рис. 5.1), размеры которой малы по сравнению с расстоянием до источника. Введем декартову систему координат, ось Z которой совпадает с направлением распространения волны.

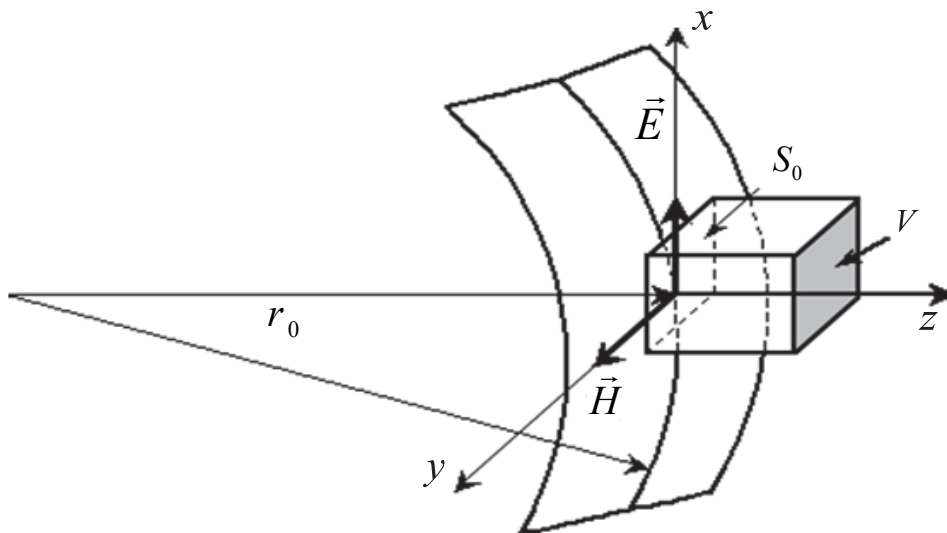


Рис. 5.1. Составляющие поля в дальней зоне

В пределах области V на поверхности S_0 , перпендикулярной координате z , можно пренебречь изменением амплитуды поля и, кроме того, считать, что фаза колебаний зависит только от координаты z .

¹⁸ Классификация и параметры сред приведены в п. 1.4.

Пусть, например, сферическая волна создается элементарным электрическим вибратором. Тогда составляющие поля в дальней зоне (4.12) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{H}_{m\varphi} = j \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} l}{2\lambda r_0} \sin\theta e^{-jk(r_0+z)}; \\ \dot{E}_{m\theta} = j \frac{\dot{I}_{m\text{ст}} l}{2\lambda r_0} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin\theta e^{-jk(r_0+z)}, \end{cases} \quad (5.1)$$

где r_0 – расстояние от источника сферической волны до начала отсчета координаты z (рис. 5.1).

Если размеры области V малы по сравнению с расстоянием r_0 от вибратора, то в пределах этой области в множителе, характеризующем амплитуду составляющих поля, можно пренебречь изменением величин r_0 и $\sin(\theta)$. При этих условиях выражения (5.1) можно записать в виде

$$\dot{H}_m = H_0 e^{-jkz}, \quad \dot{E}_m = E_0 e^{-jkz}. \quad (5.2)$$

Это означает, что в области V , прилегающей к плоскости S_0 , амплитуда поля не зависит от координат x и y , т. е. математически условие однородности ЭМВ (см. классификацию сред п. 1.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (5.3)$$

Следовательно, рассматриваемая волна в области V является плоской и однородной.

Плоской называется ЭМВ, у которой фронт волны – плоскость.

Волна называется однородной, если амплитуда и направления векторов поля в различных точках волнового фронта одинаковы.

Плоской однородной называется ЭМВ, у которой фронт волны является геометрическим местом не только равных фаз, но и амплитуд.

Рассмотрим следующую задачу.

В произвольном ограниченном объеме V , заполненном однородным, безграничным, идеальным ($\sigma = 0$) диэлектриком с параметрами ϵ_a , μ_a существует монохроматическое поле плоской однородной ЭМВ. Источники поля и свободные заряды в пределах объема V отсутствуют ($\dot{J}_{\text{ст}} = 0$ и $\dot{\rho}_{\text{ст}} = 0$).

Требуется установить зависимость векторов поля \vec{E} и \vec{H} от координат и времени.

Поскольку в рассматриваемой области отсутствуют источники поля и свободные заряды, то поле в объеме V определяется в результате решения однородных волновых уравнений (2.70):

$$\begin{cases} \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0; \\ \nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0, \end{cases}$$

где $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ – волновое число.

Так как в объеме существует плоская однородная ЭМВ, то с учетом условия (5.3) в декартовой системе координат оператор

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{d^2}{dz^2}$$

и волновые уравнения для векторов поля \vec{E} и \vec{H} приобретают вид

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{\vec{H}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0; \\ \frac{d^2 \dot{\vec{E}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Из курса математики известно, что решение дифференциальных уравнений вида (5.4) можно представить в следующей форме:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_m = \vec{h}^\circ \left[\dot{A}_1 e^{-jkz} + \dot{A}_2 e^{jkz} \right]; \\ \dot{\vec{E}}_m = \vec{e}^\circ \left[\dot{A}_3 e^{-jkz} + \dot{A}_4 e^{jkz} \right], \end{cases} \quad (5.5)$$

где \vec{e}° и \vec{h}° – орты направлений векторов \vec{E} и \vec{H} соответственно;

$\dot{A}_i = A_i e^{j\varphi_i}$ – постоянные, характеризующие комплексную амплитуду;

φ_i – начальные фазы комплексных амплитуд \dot{A}_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Умножив правую часть уравнений (5.5) на временной множитель $e^{j\omega t}$ и выполнив операцию Re от полученного выражения, получим мгновенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} в вещественной форме записи:

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{h}^\circ \left[A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + kz + \varphi_2) \right]; \\ \vec{E} = \vec{e}^\circ \left[A_3 \cos(\omega t - kz + \varphi_3) + A_4 \cos(\omega t + kz + \varphi_4) \right]. \end{cases} \quad (5.6)$$

Покажем, что выражения (5.6), характеризующие поле в объеме V (см. рис. 5.1), представляют собой сумму двух гармонических плоских волн, причем первые слагаемые представляют собой волну, распространяющуюся в *положительном* направлении оси z , вторые – волну, распространяющуюся в *отрицательном* направлении оси z .

По определению волной называется процесс, при котором некоторая физическая величина сохраняет с течением времени одно и то же значение в точках, движущихся в определенных направлениях с определенной скоростью. В рассматриваемом случае такой физической величиной является значение вектора \vec{E} (\vec{H}).

Исходя из определения волны, приравняем величину вектора в первом слагаемом постоянной величине

$$A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) = \text{const},$$

что возможно, если

$$\omega t - kz + \varphi_1 = \text{const},$$

откуда

$$z = \frac{1}{k}(\omega t + \varphi_1 = \text{const}). \quad (5.7)$$

Из анализа выражения (5.7) следует, что координата z точки в пространстве, где величина вектора \vec{E} сохраняет свое значение, увеличивается с течением времени.

Аналогично для второго слагаемого

$$z = \frac{1}{k}(-\omega t - \varphi_2 + \text{const}). \quad (5.8)$$

Из анализа (5.8) также видно, что координата z возрастает, но в сторону отрицательных значений z .

Таким образом, первые и вторые слагаемые в выражении (5.6) действительно представляют собой волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Принято волну, распространяющуюся в сторону положительных значений z , называть прямой (падающей), а распространяющуюся в сторону отрицательных значений – обратной (отраженной).

В дальнейшем будем рассматривать только прямую волну, поскольку условий для создания обратной волны в однородной изотропной бесконечной среде нет.

Тогда выражения для мгновенных значений векторов поля \vec{E} и \vec{H} в объеме V будут иметь вид

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{h}^\circ A_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1); \\ \vec{E} = \vec{e}^\circ A_3 \cos(\omega t - kz + \varphi_3). \end{cases} \quad (5.9)$$

На рис. 5.2, а показано распределение вдоль оси OZ напряженности H магнитного поля для некоторых моментов времени t_1 и t_2 .

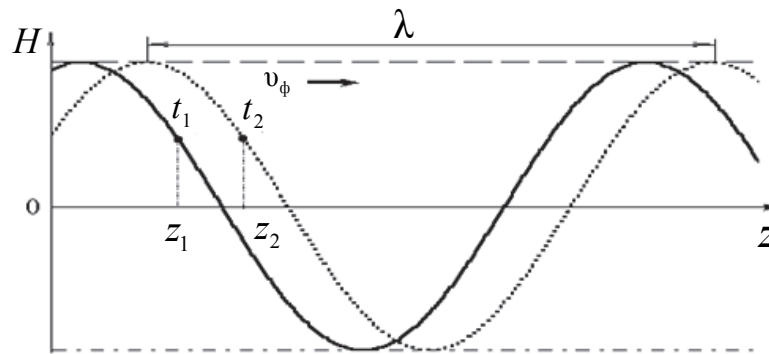


Рис. 5.2, а. Распределение вдоль оси OZ напряженности магнитного поля H для некоторых моментов времени t_1 и t_2

Докажем, что волна, описываемая (5.9), является плоской, для чего приравняем фазу (выражение, находящееся под знаком \cos) постоянной величине

$$\omega t - kz + \varphi = \text{const},$$

откуда

$$z = \frac{1}{k}(\omega t + \varphi - \text{const}). \quad (5.10)$$

В фиксированный момент времени ($t = \text{const}$) выражение (5.10) в декартовой системе координат описывает плоскость, перпендикулярную к оси z . Эта плоскость является поверхностью равных фаз, а значит, волна, описываемая выражением (5.9), является плоской.

Что касается величин, определяющих амплитуды поля (постоянные $A_1 \dots A_4$), то они зависят от типа излучающей системы, ее возбуждения и мощности излучения.

Рассмотрим основные характеристики плоской волны.

Фазовая скорость

Плоская ЭМВ в объеме V распространяется с определенной скоростью. Напомним (см. п. 4.1.3), что фазовой v_ϕ скоростью называется скорость, с которой в пространстве перемещается фазовый фронт волны. В данном случае фронт волны распространяется вдоль оси z , тогда по определению скорости

$$v_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k}(\omega t + \varphi - \text{const}) \right) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (5.11)$$

Фазовая v_ϕ скорость распространения электромагнитных волн в свободном ($\epsilon = 1$; $\mu = 1$) пространстве совпадает со скоростью света

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

В рассматриваемой среде ($\varepsilon > 1$; $\mu > 1$)

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

т. е. фазовая v_{ϕ} скорость распространения электромагнитных волн зависит только от параметров среды ε и μ и меньше скорости света.

Длина волны в среде

Длина λ волны в среде может быть определена следующим образом.

Длиной λ волны в данной среде называется минимальное расстояние между двумя точками в направлении распространения ЭМВ, в которых фаза векторов поля отличается на 2π в некоторый фиксированный момент времени (рис. 5.2, а).

Тогда из выражения (2.89) следует, что

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (5.12)$$

где k определяется в соответствии с (2.67) и показывает изменение фазы на единицу длины, т. е. сколько длин волн укладывается на отрезке длиной 2π .

Из анализа выражения (5.12) следует второе определение длины волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \frac{2\pi v_{\phi}}{2\pi f} T, \quad (5.13)$$

т. е. длиной λ волны в данной среде называется расстояние, проходимое фронтом ЭМВ за время одного T периода.

Направление векторов поля

Для определения взаимной ориентации векторов поля \vec{E} и \vec{H} в объеме V воспользуемся уравнениями (2.46) и (2.47) Максвелла для комплексных амплитуд, которые для рассматриваемых условий задачи с учетом уравнений среды имеют вид

$$\text{rot } \dot{\vec{H}}_m = j\omega\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m \text{ и } \text{rot } \dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_m,$$

где $\dot{\vec{E}}_m = \vec{e}^{\circ} E_m e^{-jkz}$ и $\dot{\vec{H}}_m = \vec{h} H_m e^{-jkz}$ – комплексные амплитуды векторов поля плоской волны.

С использованием известных тождеств векторного анализа определим

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{\vec{H}}_m &= \text{rot}(\vec{h}^{\circ} H_m e^{-jkz}) = H_m e^{-jkz} \text{rot}(\vec{h}^{\circ}) + \left[\text{grad}(H_m e^{-jkz}), \vec{h}^{\circ} \right] = \\ &= \frac{d}{dz}(H_m e^{-jkz}) \left[\vec{z}^{\circ}, \vec{h}^{\circ} \right] = -jk H_m e^{-jkz} \left[\vec{z}^{\circ}, \vec{h}^{\circ} \right] = jk \left[\dot{\vec{H}}_m, \vec{z}^{\circ} \right]. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в первое уравнение Максвелла для комплексных амплитуд

$$jk \left[\dot{\vec{H}}_m, \vec{z}^\circ \right] = j\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m,$$

откуда

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{k}{\omega \epsilon_a} \left[\dot{\vec{H}}_m, \vec{z}^\circ \right] = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left[\dot{\vec{H}}_m, \vec{z}^\circ \right]. \quad (5.14)$$

Вычисляя аналогично $\text{rot } \dot{\vec{E}}_m$ и подставляя полученное выражение во второе уравнение Максвелла для комплексных амплитуд, получим

$$\dot{\vec{H}}_m = -\frac{k}{\omega \mu_a} \left[\dot{\vec{E}}_m, \vec{z}^\circ \right] = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}} \left[\dot{\vec{E}}_m, \vec{z}^\circ \right]. \quad (5.15)$$

Из анализа выражений (5.14) и (5.15) следует, что векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и, в свою очередь, перпендикулярны направлению (орту \vec{z}°) распространения ЭМВ (рис. 5.2, б).

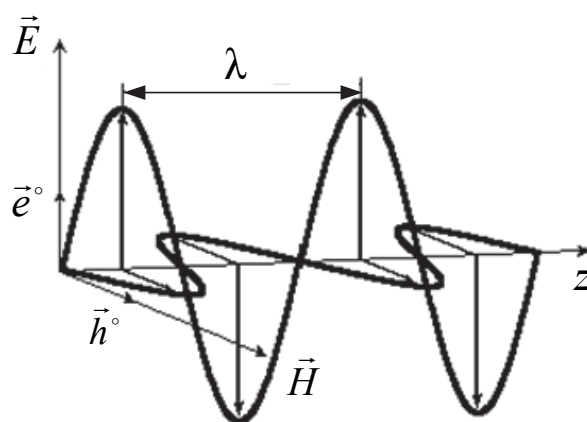


Рис. 5.2, б. Направление векторов поля в объеме

Волна, у которой векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения, называется поперечной, или Т-волной (ТЕМ).

Фазовые соотношения между векторами ЭМП

Из соотношения (5.14) следует

$$\vec{e}^\circ \dot{E}_m = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left[\dot{H}_m \vec{h}^\circ, \vec{z}^\circ \right] = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{H}_m \left[\vec{h}^\circ, \vec{z}^\circ \right] = \vec{e}^\circ \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{H}_m,$$

откуда $\dot{E}_m = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \dot{H}_m$

или

$$E_m e^{-j(kz-\varphi_1)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} H_m e^{-j(kz-\varphi_3)}. \quad (5.16)$$

Последнее равенство возможно, если $\varphi_1 = \varphi_3$, следовательно, векторы \vec{E} и \vec{H} поля плоской волны, распространяющейся в диэлектрике без потерь, синфазны.

Волновое сопротивление среды

Напомним (см. п. 4.1.3), что волновым (характеристическим) Z сопротивлением среды называется отношение комплексных (действительных) амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей, т. е. из (5.16) с учетом $\varphi_1 = \varphi_3$ получаем

$$Z = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (5.17)$$

Для свободного пространства ($\epsilon = 1, \mu = 1$)

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \pi \approx 377 \text{ Ом},$$

а для произвольной среды (диэлектрика) без потерь ($\sigma = 0$)

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Волновое сопротивление среды следует понимать как некоторую величину, через которую связаны между собой амплитуды векторов электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} , распространяющегося в данной среде. В случае диэлектрика без потерь волновое сопротивление определяется только параметрами среды и не зависит от частоты.

Таким образом, было определено поле плоской волны, распространяющейся в идеальном (без потерь) диэлектрике. В качестве примера идеального (без потерь) однородного диэлектрика можно рассматривать нижние слои тропосферы.

В реальных средах всегда имеют место потери электромагнитной энергии. Получим выражения для векторов поля и выделим основные характеристики плоской волны, распространяющейся в проводящей среде.

5.2. Плоские электромагнитные волны в однородной, изотропной, проводящей среде

Проводящая среда характеризуется параметрами ϵ_a , μ_a и $\sigma \neq 0$. В такой среде (с проводимостью, отличной от нуля ($\sigma \neq 0$)) ЭМП вызывает токи проводимости i ($\vec{J}_m \neq 0$). На поддержание этих токов расходуется часть энергии поля, в результате чего выделяется тепло (джоулевы потери). Помимо джоулевых потерь, в среде могут быть диэлектрические и магнитные потери.

Рассмотрим задачу распространения волн в проводящей среде, используя результаты, полученные для среды без потерь.

В проводящей ($\sigma \neq 0$) среде имеет место комплексная $\dot{\epsilon}_a$ (выражение (2.55)) абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, а следовательно, коэффициент k фазы будет тоже величиной комплексной и определяться в соответствии с выражением

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \mu_a} = \omega \sqrt{(\epsilon' - j\epsilon'') \mu_a} = k' - jk'' . \quad (5.18)$$

Тогда с учетом того, что условий для создания обратной волны в однородной изотропной бесконечной среде нет, решение волновых уравнений (5.4) для векторов \vec{E} и \vec{H} запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_m = \vec{h}^\circ A_1 e^{-jk'z} e^{-k''z} ; \\ \dot{\vec{E}}_m = \vec{e}^\circ A_3 e^{-jk'z} e^{-k''z} . \end{cases} \quad (5.19)$$

Умножим правую часть уравнений (5.19) на временной множитель $e^{j\omega t}$ и получим мгновенные значения векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}} = \vec{h}^\circ A_1 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z + \phi_1)} ; \\ \dot{\vec{E}} = \vec{e}^\circ A_3 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z + \phi_3)} . \end{cases} \quad (5.20)$$

В вещественной форме записи выражение (5.20) принимает вид

$$\begin{cases} \vec{H} = \vec{h}^\circ A_1 e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \phi_1) ; \\ \vec{E} = \vec{e}^\circ A_3 e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \phi_3) . \end{cases} \quad (5.21)$$

Из анализа выражения (5.21) следует, что по мере распространения волны вдоль оси z происходит убывание (рис. 5.3) амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} поля по экспоненциальному закону (множитель $e^{-k''z}$). Причем чем

больше k'' , тем быстрее затухает волна. Физически затухание ЭМП в проводящей среде объясняется превращением части энергии поля в тепловую.

Следовательно, коэффициент k'' имеет смысл коэффициента затухания и характеризует величину убывания амплитуды поля на единицу длины. Коэффициент затухания k'' в дальнейшем будет обозначаться α .

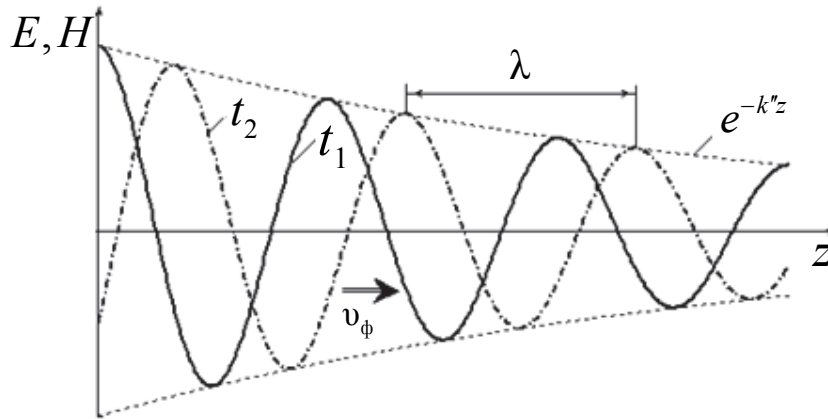


Рис. 5.3. Убывание амплитуды векторов поля \vec{E} и \vec{H} по мере распространения волны вдоль оси z

Коэффициент k' имеет смысл коэффициента фазы и характеризует изменение фазы колебаний на единицу длины. Коэффициент фазы k' в дальнейшем будет обозначаться β .

Получим формулы для α и β , для чего возведем в квадрат обе части выражения (5.18):

$$\omega^2 \varepsilon' \mu_a - j \omega^2 \varepsilon'' \mu_a = (k')^2 - 2j k' k'' - (k'')^2. \quad (5.22)$$

Так как равенство двух комплексных чисел предполагает равенство их вещественных и мнимых частей, то из (5.22) с учетом (2.55) и (2.56) получим

$$\begin{cases} (k')^2 - (k'')^2 = \omega^2 \varepsilon' \mu_a = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a; \\ 2k' k'' = \omega^2 \varepsilon'' \mu_a = \omega^2 \mu_a \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} \varepsilon_a = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \operatorname{tg} \delta. \end{cases} \quad (5.23)$$

Решив систему уравнений (5.23) относительно α и β , получим

$$\begin{cases} \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}; \\ \alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)}. \end{cases} \quad (5.24)$$

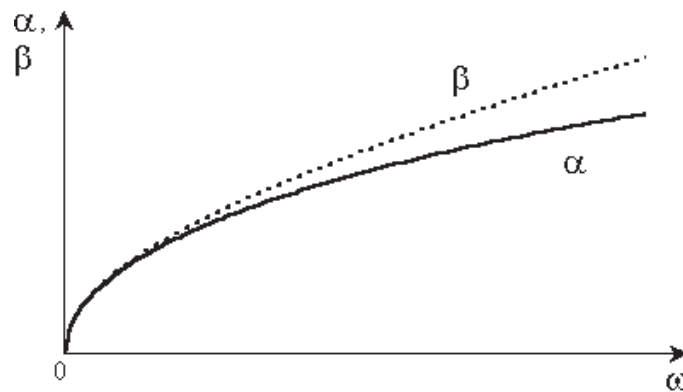


Рис. 5.4. Зависимости коэффициента затухания и коэффициента фазы от частоты

Из анализа выражений (5.24) и рис. 5.4 следует, что коэффициенты k' и k'' нелинейно зависят от частоты, так как в соответствии с (2.56) $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}$.

Поэтому *в отличие от свойств плоской волны, распространяющейся в среде без потерь, где параметры плоской волны (v_ϕ , λ , Z и др.) одинаковы при любых частотах, в проводящей среде эти параметры будут зависеть от частоты.*

Рассмотрим основные характеристики плоской волны в среде с потерями.

Фазовая скорость

Фазовая скорость v_ϕ распространения ЭМВ в проводящей среде определяется в соответствии с выражениями (5.11) и (5.24):

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}}. \quad (5.25)$$

Из анализа (5.25) следует, что в среде с потерями фазовая скорость плоской волны v_ϕ в отличие от диэлектрической среды без потерь зависит от проводимости среды σ и от частоты ω , причем с увеличением проводимости среды σ фазовая скорость увеличивается.

Явление зависимости фазовой скорости v_ϕ от частоты ω называется дисперсией ЭМВ, а среда, в которой наблюдается дисперсия, – диспергирующей.

В ряде практических случаев дисперсия и зависимость коэффициента затухания α от частоты приводят к нежелательным явлениям. В качестве примера рассмотрим радиолокационный (рис. 5.5) сигнал, представляющий собой пачку прямоугольных радиоимпульсов, распространяющийся

в среде с потерями. Известно, что подобный периодический сигнал можно представить как сумму отдельных гармонических составляющих. Каждая из них имеет свою амплитуду, фазу и частоту.

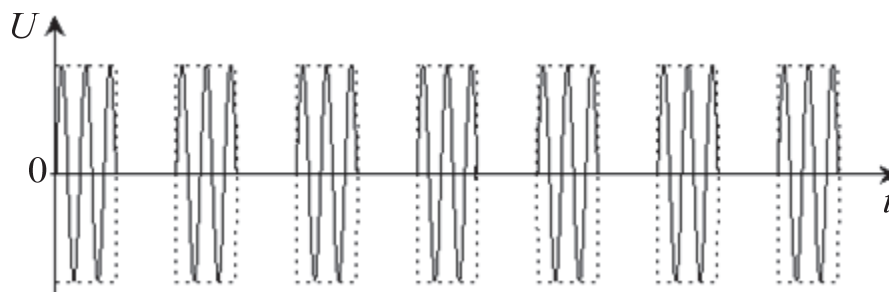


Рис. 5.5. Когерентная пачка прямоугольных радиоимпульсов

Поскольку $\alpha = f(\omega)$, то разные гармоники, имеющие разные частоты, будут затухать по-разному, поэтому по мере распространения сигнала соотношения между амплитудами гармоник изменяются, что приводит к амплитудным изменениям формы сигнала, т. е. к изменению его огибающей.

Поскольку $\beta = f(\omega)$, то разные гармоники, имеющие разные частоты, на одном и том же пути будут получать разные фазовые сдвиги, что приводит к фазовым искажениям сигнала.

В результате прямоугольные радиоимпульсы после прохождения проводящей среды могут стать колоколообразными.

Вместе с тем явление дисперсии ЭМВ часто является полезным и используется для создания:

- сигналов специальной формы (очень малой длительности);
- широкодиапазонных антенн (спиральные антенны);
- антенн с управляемыми характеристиками (волноводно-щелевые антенны).

Групповая скорость

Понятие фазовой скорости v_{ϕ} , введенное для характеристики монохроматической волны (волны одной частоты, изменяющейся по гармоническому закону), теряет однозначный смысл для группы волн, составляющих спектр сигнала, несущего информацию.

Так как скорости распространения отдельных гармоник $v_{\phi} = f(\omega)$, на которые разлагается сигнал, различны, то под скоростью распространения радиосигнала необходимо понимать скорость перемещения той части электромагнитного колебания, в которой сконцентрирована основная часть электромагнитной энергии.

Для сигналов сложной структуры вводят понятие групповой скорости $v_{гр}$.

Под групповой скоростью $v_{гр}$ понимают скорость перемещения максимума огибающей сигнала, т. е. первой гармоники, которая переносит основную часть энергии электромагнитного поля. Групповая скорость характеризует скорость переноса энергии сигнала сложной структуры.

Получим выражение для групповой скорости $v_{гр}$ сигнала сложной структуры и установим ее связь с фазовой скоростью $v_{ф}$. Для примера рассмотрим сигнал, состоящий из двух гармоник равной амплитуды с близкими частотами $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$ и $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ (рис. 5.6, а) и распространяющихся с фазовыми скоростями $v_{ф1}$ и $v_{ф2}$ в направлении возрастания координаты z .

Для сигнала (рис. 5.6, а) мгновенное значение напряженности электрического поля можно записать в виде

$$E = E_m \cos(\omega_1 t - k'_1 z) + E_m \cos(\omega_2 t - k'_2 z) = \\ = 2E_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k'_1 - k'_2}{2} z\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k'_1 + k'_2}{2} z\right), \quad (5.26)$$

так как

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

В выражении (5.26) первый множитель представляет собой огибающую (рис. 5.6, б) амплитуду сигнала, а второй – его высокочастотное заполнение. Определим скорость перемещения этой огибающей. Эта скорость и будет являться групповой скоростью $v_{гр}$.

Из определения волнового процесса и его скорости следует

$$(\omega_1 - \omega_2) t - \left(\frac{\omega_1}{v_{ф1}} - \frac{\omega_2}{v_{ф2}} \right) z = \text{const}$$

и

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{\left(\frac{\omega_1}{v_{ф1}} - \frac{\omega_2}{v_{ф2}} \right)} = \frac{-2\Delta\omega}{\left(\frac{\omega - \Delta\omega}{v_{ф1}} - \frac{\omega + \Delta\omega}{v_{ф2}} \right)}.$$

По определению групповая скорость

$$v_{гр} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{-2\Delta\omega}{\left(\frac{\omega - \Delta\omega}{v_{ф1}} - \frac{\omega + \Delta\omega}{v_{ф2}} \right)} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{v_{ф}} \right)}.$$

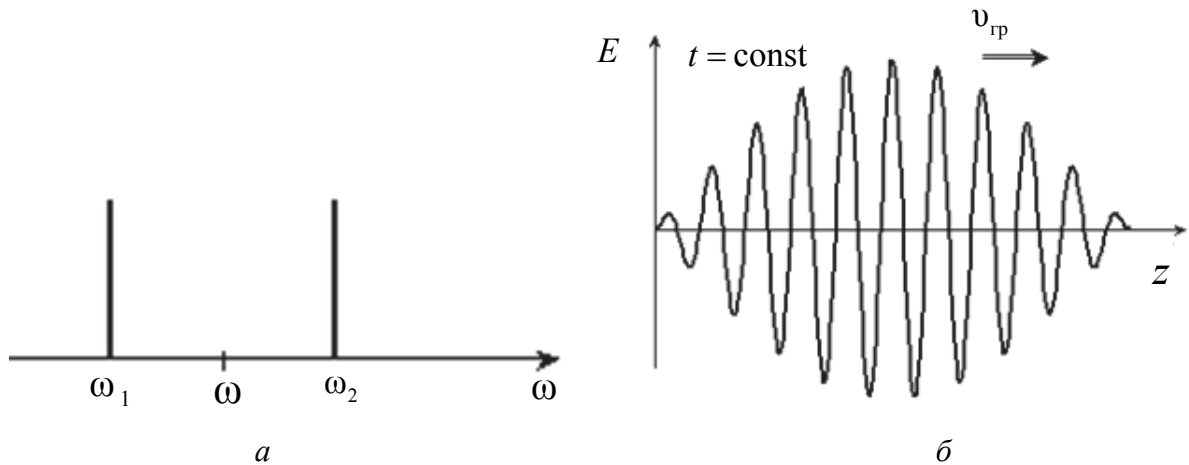


Рис. 5.6. Сигнал, состоящий из двух гармоник равной амплитуды с близкими частотами (а), и амплитуда огибающей сигнала и его высокочастотное заполнение (б)

С учетом выражения (5.25) получаем

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\left(\frac{\omega}{v_{\phi}}\right)} = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}}. \quad (5.27)$$

Установим связь между $v_{гр}$ групповой и v_{ϕ} фазовой скоростями, для чего найдем

$$\frac{d}{d\omega} k' = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v_{\phi}} \right) = \frac{v_{\phi} - \omega \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}{(v_{\phi})^2} = \frac{1 - \frac{\omega}{v_{\phi}} \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}{v_{\phi}}. \quad (5.28)$$

Подставив (5.28) в (5.27), получим окончательное выражение для групповой скорости, которая получила название формулы Эйлера

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{v_{\phi}}{1 - \frac{\omega}{v_{\phi}} \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}. \quad (5.29)$$

Из анализа (5.29) следует, что в диспергирующей среде $\left(\frac{dv_{\phi}}{d\omega} \neq 0\right)$ огибающая сигнала и фаза колебаний распространяются с различной скоростью. Если среда недиспергирующая $\left(\frac{dv_{\phi}}{d\omega} = 0\right)$, то в этом случае групповая $v_{гр}$ и фазовая v_{ϕ} скорости равны ($v_{\phi} = v_{гр}$) и определяются в соответствии с (5.11).

В зависимости от величины $\frac{d\nu_\phi}{d\omega}$ различаются:

- нормальная дисперсия, если $\frac{d\nu_\phi}{d\omega} < 0$, т. е. $\nu_{гр} < \nu_\phi$;
- аномальная дисперсия, если $\frac{d\nu_\phi}{d\omega} > 0$, т. е. $\nu_{гр} > \nu_\phi$.

При аномальной дисперсии знаменатель выражения (5.29) может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Тогда направление фазовой и групповой скоростей могут как совпадать, так и быть противоположными. Поэтому аномальную дисперсию подразделяют на положительную и отрицательную.

З а м е ч а н и е. Групповая скорость всегда считается положительной, а знак фазовой скорости определяется по отношению к групповой.

Фазовые соотношения между векторами ЭМП

Для определения фазовых соотношений между векторами поля \vec{E} и \vec{H} в проводящей среде воспользуемся соотношением (5.14), в которое подставим из выражения (5.20) значения векторов ЭМП. В результате получим

$$\vec{e}^\circ E_m e^{-j(kz-\varphi_3)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \left[\vec{h}^\circ H_m e^{-j(kz-\varphi_1)}, \vec{z}^\circ \right],$$

откуда

$$E_m e^{j\varphi_3} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} H_m e^{j\varphi_1}.$$

Поскольку в проводящей ($\sigma \neq 0$) среде абсолютная диэлектрическая проницаемость – величина комплексная $\dot{\epsilon}_a$ (выражение (2.55)), то полученное выше равенство приобретает вид

$$E_m e^{j\varphi_3} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}}} H_m e^{j\varphi_1} = \sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a + j\frac{\sigma}{\omega} \mu_a}{\epsilon_a^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega}\right)^2}} H_m e^{j\varphi_1}.$$

После преобразований получим

$$E_m e^{j\varphi_3} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}\right)^2}} e^{j0,5 \arctg\left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}\right)} H_m e^{j\varphi_1}. \quad (5.30)$$

С учетом (2.56) и тригонометрического равенства $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ выражение (5.30) окончательно приобретает вид

$$E_m e^{j\varphi_3} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{\cos \delta} e^{j\frac{\delta}{2}} H_m e^{j\varphi_1},$$

откуда

$$\frac{E_m}{H_m} e^{j(\varphi_3 - \varphi_1)} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{\cos \delta} e^{j\frac{\delta}{2}}. \quad (5.31)$$

Из анализа выражения (5.31) следует, что

$$\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = \delta/2; \quad (5.32)$$

$$Z = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{\cos \delta}. \quad (5.33)$$

Как видно из (5.32), в проводящей среде векторы поля $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$ не-синфазны, причем магнитное поле ($\dot{\vec{H}}$) отстает по фазе от поля электрического ($\dot{\vec{E}}$) на величину $\varphi = 0,5\delta$.

Таким образом, в средах с потерями амплитуды векторов $\dot{\vec{H}}$ магнитного и $\dot{\vec{E}}$ электрического полей изменяются вдоль направления распространения по экспоненциальному закону и между векторами поля наблюдается сдвиг фазы на некоторую величину φ .

Волновое сопротивление среды

Исходя из определения и выражения (5.31), получим, что волновое (характеристическое) сопротивление проводящей среды является величиной комплексной

$$\dot{Z} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \sqrt{\cos \delta} e^{j\frac{\delta}{2}} = Z e^{j\varphi}, \quad (5.34)$$

где Z – модуль комплексного волнового сопротивления проводящей среды \dot{Z} определяется в соответствии с (5.33);

φ – аргумент комплексного волнового сопротивления проводящей среды \dot{Z} , характеризующий сдвиг фаз между векторами $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{H}}$, определяется в соответствии с (5.32).

Из анализа (5.34) следует, что характеристическое сопротивление проводящей среды зависит не только от параметров (ε , μ , σ) среды, но и от частоты ω . Чем больше отношение $\sigma/\omega\varepsilon_a$, тем меньше волновое сопротив-

ление проводящей среды и, следовательно, тем большая часть энергии сосредоточена в магнитном поле по сравнению с электрическим.

Длина волны в среде

Из определения длины волны λ , выражений (5.12) и (5.24) следует, что длина волны в среде с потерями λ_c определяется соотношением

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}}, \quad (5.35)$$

где $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ – длина волны в вакууме.

Из анализа (5.35) видно, что длина волны в проводящей среде λ_c меньше, чем в вакууме, и зависит от параметров среды (ϵ , μ , σ) и частоты ω . С ростом значений $\operatorname{tg} \delta$ и ϵ возрастает отличие длины волны в данной среде λ_c от длины волны в свободном пространстве λ_0 .

Таким образом, было рассмотрено поле плоской волны, распространяющейся в проводящей среде. Рассмотрим два частных случая реальных сред – диэлектрика и проводника.

5.2.1. Свойства плоских электромагнитных волн в реальном диэлектрике

Согласно классификации сред, приведенной в п. 2.8.3, для реальных диэлектриков

$$\operatorname{tg} \delta = \ll 1,$$

следовательно, выражения (5.24) для коэффициентов α и β упрощаются и принимают вид

$$\beta \approx \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (5.36)$$

что соответствует выражению (2.67) коэффициента фазы для идеального диэлектрика.

В формуле для коэффициента α воспользуемся приближенным равенством

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \approx 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \delta,$$

откуда с учетом (2.56) получим

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \delta \right)} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_a \mu_a}{4} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (5.37)$$

Для свободного пространства ($\varepsilon = 1, \mu = 1$) имеем

$$\alpha = 60 \pi \sigma.$$

Фазовая скорость

Фазовая скорость v_ϕ распространения ЭМВ в реальном диэлектрике определяется в соответствии с выражениями (5.11) и (5.36):

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}, \quad (5.38)$$

откуда видно, что фазовая скорость v_ϕ в среде с малыми потерями практически не зависит от частоты, т. е. в реальных диэлектриках можно не учитывать дисперсию.

Фазовые соотношения между векторами ЭМП

Фазовый сдвиг φ между электрическим и магнитным полями в средах с потерями определяется в соответствии с (5.32) как

$$\varphi = 0,5 \delta = 0,5 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} \right), \quad (5.39)$$

откуда видно, что фазовый сдвиг между векторами \vec{E} и \vec{H} поля плоской ЭМВ, распространяющейся в реальном диэлектрике, мал и составляет от нескольких минут до нескольких (4–5) градусов.

Волновое сопротивление среды

Волновое (характеристическое) сопротивление реального диэлектрика определяется в соответствии с (5.34), а поскольку $\sqrt{\cos \delta} \approx 1$ и фазовый сдвиг φ между электрическим и магнитным полями в реальном диэлектрике мал, то можно сделать вывод, что *характеристическое сопротивление реального диэлектрика практически равно волновому сопротивлению идеального диэлектрика*, т. е.

$$Z \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \quad (5.40)$$

Длина волны в среде

Из (5.35) следует, что *длина волны λ_c в реальном диэлектрике определяется соотношением*

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k'} \approx \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \quad (5.41)$$

и практически равна длине волны в идеальном диэлектрике.

Анализ выражений (5.37)–(5.41) показывает, что в реальном диэлектрике практически отсутствует затухание поля, а фазовая скорость распространения и длина волны примерно такие же, как и в среде без потерь. Дисперсионные свойства реального диэлектрика проявляются незначительно.

5.2.2. Свойства плоских электромагнитных волн в реальном проводнике

Согласно классификации сред, приведенной в п. 2.8.3, для реальных проводников (например, металлы)

$$\operatorname{tg} \delta \gg 1,$$

следовательно, выражения (5.24) для коэффициентов α и β упрощаются и принимают вид

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}}. \quad (5.42)$$

Из анализа (5.42) видно, что:

- постоянные α затухания и β фазы нелинейно зависят от ω частоты, а следовательно, свойства плоской волны при распространении в реальных проводниках будут существенно различными на различных частотах;
- амплитуда поля плоской волны в проводнике убывает (поскольку $\alpha \sim \sqrt{\omega \sigma}$) значительно быстрее, чем в других средах (сравним с выражением (5.37) для реальных диэлектриков)). Особенно быстро убывает амплитуда поля в металлах на высоких частотах.

Получим некоторые выражения для параметров поля плоской волны в проводнике и проведем их анализ.

Фазовая скорость

Подставив в (5.11) выражение (5.42), получим формулу для фазовой скорости v_ϕ распространения ЭМВ в реальном проводнике

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta}{2}}}, \quad (5.43)$$

откуда видно, что проводник, как и любая среда с конечной проводимостью, является диспергирующей средой. Зависимость фазовой скорости v_ϕ плоской волны от ω и σ в проводнике выражена более резко, чем в других проводящих средах.

Из анализа (5.43) видно, что:

- при фиксированной ($\omega = \text{const}$) частоте с увеличением σ проводимости фазовая v_ϕ скорость уменьшается. Например, при частоте $f = 3$ МГц фа-

зоявая скорость плоской волны в морской воде ($\sigma = 4 \text{ См/м}$), $v_{\phi} \approx 2,74 \cdot 10^6 \text{ м/с}$, а в меди ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$) – $v_{\phi} \approx 725 \text{ м/с}$;

- при фиксированной ($\sigma = \text{const}$) проводимости фазовая скорость v_{ϕ} с увеличением частоты ω всегда будет возрастать и при больших частотах ($\omega \rightarrow \infty$) фазовая скорость стремится к скорости распространения плоской ЭМВ в диэлектрической среде с параметрами ϵ_a и μ_a (см. (5.38)), т. е. в *проводнике фазовая скорость распространения значительно меньше, чем в диэлектрике*.

Длина волны в среде

Изменение фазовой скорости v_{ϕ} приводит в соответствии с (5.13) к изменению длины волны в среде λ_c , которая в реальных проводниках определяется как

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta} \approx 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\sigma}}. \quad (5.44)$$

Из анализа выражения (5.44) видно, что чем больше проводимость среды σ при фиксированной частоте ($\omega = \text{const}$), тем меньше длина волны в проводнике. Например, при частоте $f = 3 \text{ МГц}$ ($\lambda_0 = 100 \text{ м}$) длина волны в морской воде ($\sigma = 4 \text{ См/м}$) $\lambda_{\text{морская вода}} \approx 91,3 \text{ см}$, а в меди ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$) – $\lambda_{\text{медь}} \approx 0,24 \text{ мм}$.

Из сравнения выражений (5.41) и (5.44) следует, что в *проводнике длина волны значительно меньше, чем в диэлектрике*.

Фазовые соотношения между векторами ЭМП

Фазовый сдвиг между векторами поля \vec{E} и \vec{H} плоской ЭМВ, распространяющейся в реальном проводнике, определяется в соответствии с (5.32) и составляет

$$\varphi = 0,5 \arctg\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_a}\right) = 0,5 \cdot 90^\circ = 45^\circ. \quad (5.45)$$

Сдвиг фаз φ , равный 45° , является максимальным, который может иметь место между электрическим и магнитным полями в реальном проводнике (рис. 5.7).

Волновое сопротивление среды

Волновое (характеристическое) сопротивление реального проводника является величиной комплексной и определяется как

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (5.46)$$

или в тригонометрической форме

$$\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{\sigma}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = R_s + jX_s \quad (5.47)$$

где

$$R_s = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} \quad (5.48)$$

– поверхностное сопротивление определяет тепловые потери энергии поля;

$X_s = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}}$ – характеризует реактивное сопротивление и носит индуктивный характер.

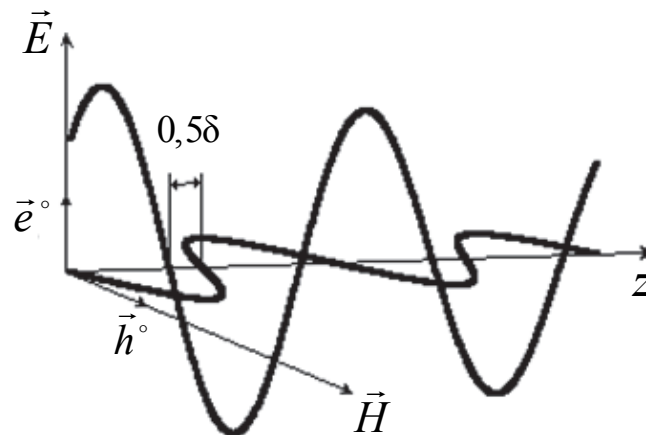


Рис. 5.7. Сдвиг фаз между электрическим и магнитным полями в реальном проводнике

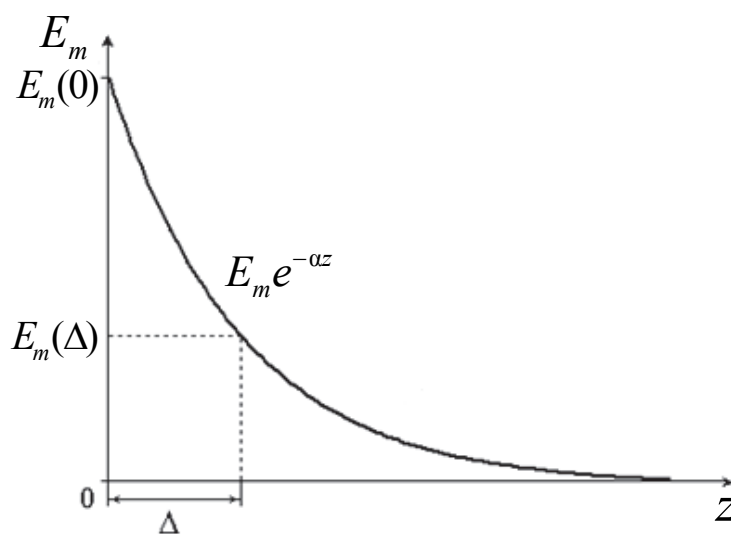


Рис. 5.8. Иллюстрация понятия: эквивалентная глубина проникновения

Из анализа (5.48) видно, что

- величина волнового сопротивления реального проводника во много раз меньше, чем для реального диэлектрика, например, при частоте $f = 1$ МГц – $|\dot{Z}_{\text{медь}}| = 10^{-4}$ Ом, а $|\dot{Z}_{\text{морская вода}}| = 0,4$ Ом;

- с увеличением частоты ω величина поверхностного сопротивления R_s возрастает, а значит, увеличиваются тепловые потери электромагнитной энергии и, как следствие, ЭМП в проводнике быстро затухает.

Для характеристики величины затухания поля в проводящей среде вводят понятие эквивалентной глубины проникновения.

Эквивалентной глубиной проникновения поля в проводник называется такое расстояние Δ в толще проводника, на котором амплитуда поля убывает в e раз (рис. 5.8).

Пусть амплитуда напряженности электрического поля в точке с координатой $z = 0$ равна $E_m(0)$, а амплитуда с координатой $z = \Delta$ равна $E_m(\Delta)$. Тогда согласно определению

$$\frac{E_m(0)}{E_m(\Delta)} = \frac{E_m e^{-\alpha \cdot 0}}{E_m e^{-\alpha \Delta}} = e^{\alpha \Delta} = e,$$

откуда

$$\Delta = 1/\alpha. \quad (5.49)$$

Из анализа выражения (5.49) следует, что эквивалентная Δ глубина проникновения ЭМП в проводящую среду определяется как величина, обратная коэффициенту α (см. выражение (5.42)) затухания, т. е.

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a \omega \sigma_a}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}}. \quad (5.50)$$

Убывание амплитуды поля с расстоянием измеряют в неперах и децибелах.

Ослаблению в один непер (Нп) соответствует такое расстояние l , на котором амплитуда поля уменьшается в e раз. Затухание в неперах определяют как натуральный логарифм, Нп

$$\ln \frac{E_m(z)}{E_m(z+l)} = \frac{1}{2} \ln \frac{P(z)}{P(z+l)} = \frac{1}{2} \ln e^{2\alpha l} = \alpha l,$$

где $P(z)$ – мощность поля в точке с координатой z .

Ослаблению в один бел (Б) соответствует такое расстояние l , на котором мощность поля уменьшается в 10 раз. Единица, в 10 раз меньшая

одного бела, называется *децибелом* (1 Б = 10 дБ). Затухание в децибелах определяют из соотношения, Дб

$$20 \lg \frac{E_m(z)}{E_m(z+l)} = 10 \lg \frac{P(z)}{P(z+l)} \approx 8,68 \alpha l.$$

Между [Нп] и [дБ] имеется следующая связь:

$$1 \text{ Нп} = 8,69 \text{ дБ}.$$

Вычислим для примера коэффициент α затухания и глубину Δ проникновения волны, распространяющейся в меди ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ См/м) при частоте $f = 1$ МГц:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi \cdot 10^6 \cdot 5,7 \cdot 10^7}{2}} = 15\,000 \text{ Нп/м};$$

$$\Delta = \frac{1}{15\,000} = 6,667 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Это означает, например, что при прохождении волной расстояния в один миллиметр ее амплитуда уменьшается в e^{15} раз, т. е. примерно в 3,27 млн раз, при этом эквивалентная глубина проникновения ЭМП в медь составляет примерно 0,067 мм. Приведенный пример показывает, что переменное электромагнитное поле на частотах радиотехнического диапазона практически не проникает вглубь проводника.

Вследствие малой глубины проникновения поля в металл ток высокой частоты (переменный ток) сосредоточивается главным образом у поверхности проводника. Это явление носит название *поверхностного эффекта*, или *скин-эффекта*.

Из-за поверхностного эффекта сопротивление проводника переменному току R_{var} больше сопротивления постоянному току R_{const} . Определим в качестве примера сопротивление цилиндрического провода радиуса a (рис. 5.9) постоянному i_{const} и переменному i_{var} токам.

Так как постоянный ток проходит через всю площадь поперечного сечения цилиндрического провода, то

$$R_{\text{const}} = \frac{l}{\pi a^2 \sigma}.$$

Тогда отношение сопротивлений определяется выражением

$$\frac{R_{\text{var}}}{R_{\text{const}}} = \frac{a}{2\Delta} = a \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{8}}.$$

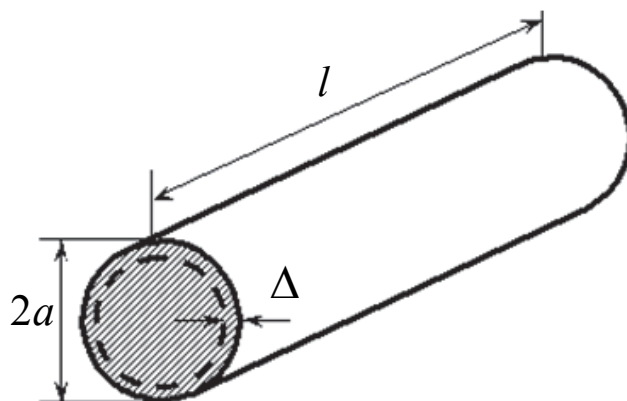


Рис. 5.9. К определению сопротивления цилиндрического провода радиуса a

Для уменьшения R_{var} необходимо увеличивать поверхность, по которой протекает ток. Для этого на практике применяют витые проводники, свитые из нескольких тонких проводов.

Необходимо отметить, что явление поверхностного эффекта имеет не только отрицательные, но и положительные стороны, позволяя металлические стенки и сетки широко применять в качестве отражателей ЭМВ (например, стенки волноводов и резонаторов; отражатели антенных систем; экраны электромагнитных волн и т. д.).

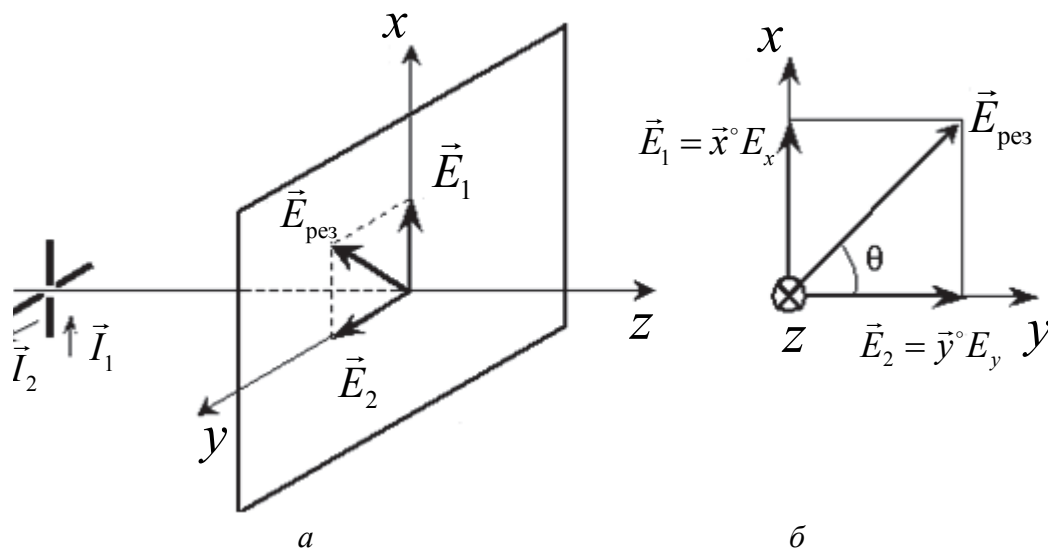
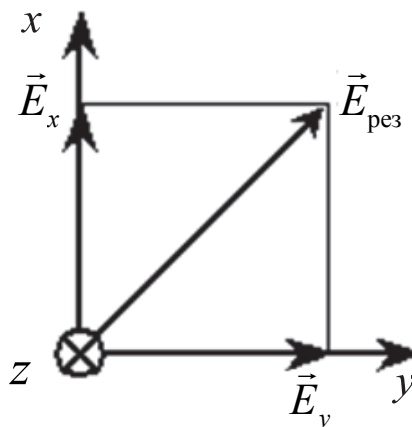
5.3. Поляризация плоских электромагнитных волн

ЭМП, направление векторов \vec{E} и \vec{H} которого определено в любой момент времени, называется **поляризованным**. Если же ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} изменяется в пространстве случайно, то поле является неполяризованным. Простейшими примерами поляризованного ЭМП являются поля, создаваемые элементарными источниками излучения (см. гл. 4), а также поле плоской волны в однородной изотропной среде.

Ориентация векторов \vec{E} и \vec{H} в пространстве зависит от свойств и конструкции источника, создающего волну, и от ориентации системы координат. Пусть, например, волна создается ЭЭВ, ось которого совпадает с осью x . Тогда в дальней зоне ($kr \gg 1$), где сферическую волну можно приближенно считать плоской, вектор \vec{E} будет иметь одну составляющую E_x , а вектор \vec{H} – только составляющую H_y .

Когда ЭЭВ ориентирован произвольно относительно системы координат, то векторы \vec{E} и \vec{H} имеют составляющие, параллельные обеим осям, например (рис. 5.10), вектор \vec{E} будет иметь составляющую E_x и E_y , которые изменяются синфазно.

Рис. 5.10. Ориентация составляющих вектора электрического поля в прямоугольной системе системы координат


 Рис. 5.11. Формирование плоской ЭМВ: *а* – две взаимно перпендикулярные ЭЭВ, расположенные на оси *z* параллельно осям *x* и *y*; *б* – результат суперпозиции двух ЭМВ

Плоскую ЭМВ можно также создавать (рис. 5.11, *а*) двумя взаимно перпендикулярными ЭЭВ, расположенными на оси *z* параллельно оси *x* и *y* соответственно. В этом случае вектор \vec{E} также имеет две составляющие: E_1 и E_2 , но эти составляющие могут изменяться либо синфазно, либо с некоторым фазовым сдвигом, зависящим от соотношения между фазами токов, питающих вибраторы.

Таким образом, в общем случае плоскую волну ($\vec{E}_{\text{рез}}$) можно рассматривать (рис. 5.11, *а*) как суперпозицию двух (\vec{E}_1 и \vec{E}_2) плоских волн одинаковой частоты со взаимно перпендикулярной ориентацией векторов \vec{E} ($\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$), распространяющихся в одном направлении (вдоль оси *z*), т. е.

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{x}^\circ E_x + \vec{y}^\circ E_y.$$

В результате суперпозиции двух ЭМВ получена плоская волна, вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ которой характеризуется (рис. 5.11, б) двумя параметрами:

- мгновенным значением

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{E_{mx}^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_1) + E_{my}^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_2)}; \quad (5.51)$$

- углом θ поляризации

$$\theta = \text{arctg} \frac{E_x}{E_y} = \text{arctg} \frac{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1)}{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2)}, \quad (5.52)$$

где E_{mx} и E_{my} – амплитуды векторов поля, создаваемых соответствующими вибраторами;

φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний векторов в точке $z = 0$ в момент времени $t = 0$.

Из анализа (5.51) и (5.52) следует, что характер изменения вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ (мгновенное $E_{\text{рез}}$ значение и угол θ поляризации) плоской волны с течением времени вдоль оси z зависит от соотношения между φ_1 и φ_2 начальными фазами и E_{mx} и E_{my} амплитудами, что определяет различные виды поляризации.

Под поляризацией понимают характеристику электромагнитной волны, определяющую закон изменения направления и величины вектора напряженности электрического поля \vec{E} в данной точке пространства за период колебания.

*Плоскость, в которой лежит вектор напряженности электрического поля \vec{E} и которая проходит через направление распространения волны, называется **плоскостью поляризации**.*

Электромагнитные гармонические волны могут иметь (рис. 5.12) два вида поляризации: **линейную** и **вращающуюся**, причем волны с **вращающейся** поляризацией можно разделить на два типа – **круговую** и **эллиптическую**.

Линейно-поляризованной (плоскополяризованной) ЭМВ называется такая волна, у которой плоскость поляризации в пространстве не изменяет ($\theta = \text{const}$) своего положения. При этом в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства с течением времени конец вектора \vec{E} перемещается вдоль отрезка прямой линии (рис. 5.13). Если вектор \vec{E} ориентирован вдоль оси oy , то волна называется **горизонтально поляризованной**, если вдоль оси ox – **вертикально поляризованной**.

ЭМВ будет иметь **круговую поляризацию** (рис. 5.14, а) в том случае, если вектор \vec{E} совершает равномерное вращательное движение, а в фикс-

сированной точке пространства ($z = \text{const}$) с течением времени ($t = \text{var}$) конец вектора описывает окружность. В пространстве конец вектора описывает круговую спираль (рис. 5.15).

Полный оборот вектор совершает за время одного периода T .

ЭМВ *эллиптической поляризации* (рис. 5.14, б) будет в том случае, если конец вектора \vec{E} в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства описывает эллипс, а в пространстве – эллиптическую спираль. Вектор \vec{E} вращается при этом неравномерно.

Различают волны с правым и левым вращением вектора. Если вращение вектора \vec{E} происходит по часовой стрелке при наблюдении в сторону распространения, то такая волна называется *правополяризованной* (рис. 5.15), а при противоположном вращении – *левополяризованной*.

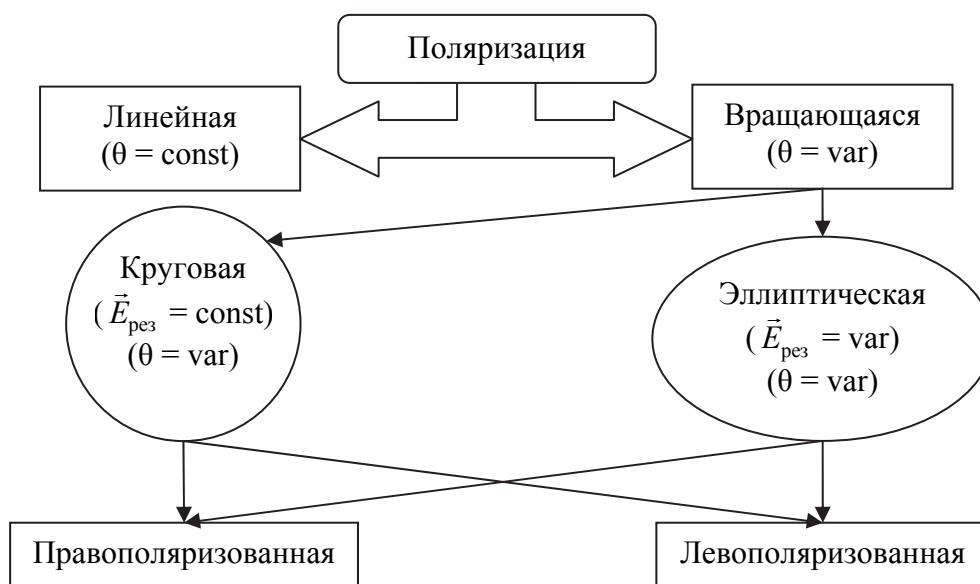


Рис. 5.12. Виды поляризации электромагнитных гармонических волн

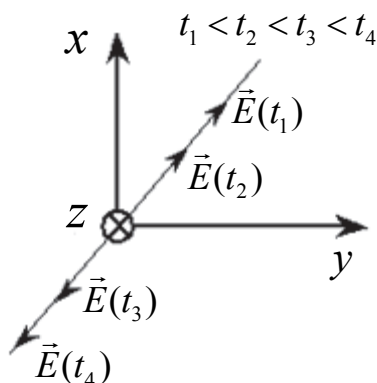


Рис. 5.13. Линейно-поляризованная (плоскополяризованная) ЭМВ

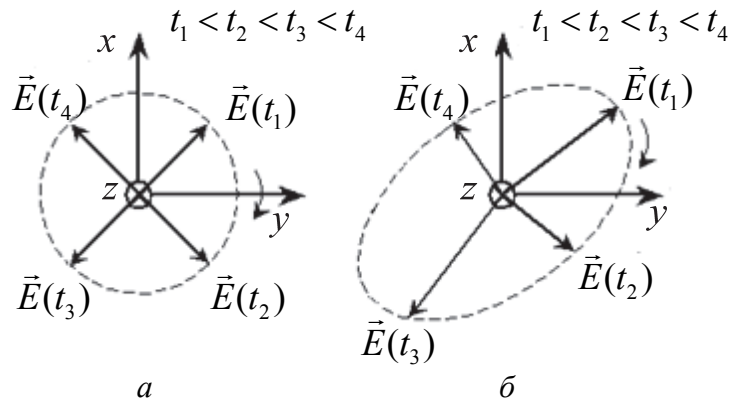


Рис. 5.14. ЭМВ с круговой (а) и эллиптической (б) поляризацией

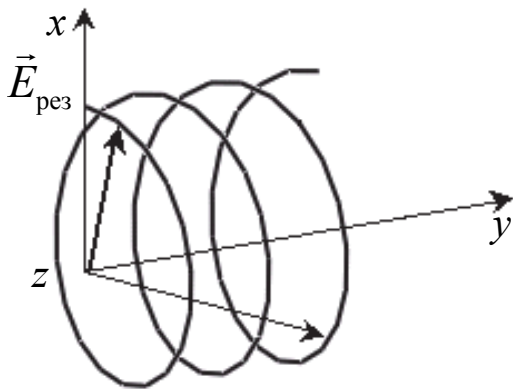


Рис. 5.15. Положение вектора \vec{E} при круговой поляризации

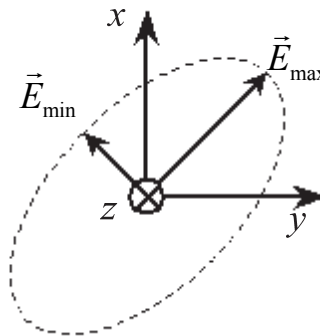


Рис. 5.16. Изменение величины вектора \vec{E} при эллиптической поляризации

Для характеристики волн с эллиптической поляризацией вводят понятие *коэффициента P поляризации*:

$$P = \frac{\vec{E}_{\min}}{\vec{E}_{\max}}, 0 \leq P \leq 1,$$

где E_{\min} и E_{\max} – минимальное и максимальное значения вектора \vec{E} (рис. 5.16).

При линейной поляризации коэффициент поляризации $P = 0$, при круговой $P = 1$. Таким образом, круговую и линейную поляризации можно трактовать как частные случаи эллиптической.

Определим условия получения ЭМВ различной поляризации в результате сложения двух волн:

- с линейной поляризацией, т. е. $\vec{E}_1 = \vec{x}^\circ E_x$; $\vec{E}_2 = \vec{y}^\circ E_y$;
- распространяющихся в одном направлении, т. е. $\vec{\Pi}_1 \parallel \vec{\Pi}_2$;

- векторы \vec{E} которых взаимно перпендикулярны, т. е. $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$;
- частоты одинаковы, т. е. $\omega_1 = \omega_2$.

Рассмотрим с этой целью несколько частных случаев.

5.3.1. Условия получения ЭМВ линейной поляризации

Предположим, что начальные фазы колебаний векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 равны, т. е.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \text{ или } \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0.$$

Тогда мгновенные значения вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ (рис. 5.11, б) плоской волны, полученной в результате суперпозиции двух ЭМВ, определяются в соответствии с выражением (5.51):

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{E_{mx}^2 + E_{my}^2} \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

а угол θ поляризации – в соответствии с (5.52):

$$\theta = \arctg \frac{E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi)}{E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi)} = \arctg \frac{E_{mx}}{E_{my}} \text{ const.}$$

Таким образом, результирующий вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ лежит в плоскости, проходящей через ось oz и составляющей угол θ с плоскостью yoz . Мгновенное значение вектора в фиксированной точке ($z = \text{const}$) пространства изменяется по закону $\cos(\omega t + \varphi)$, а угол θ не изменяется ($\theta = \text{const}$), следовательно, конец вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ колеблется вдоль отрезка прямой (рис. 5.17), т. е. в этом случае имеет место **линейно-поляризованная** волна.

Необходимо отметить, что угол θ поляризации зависит от отношения амплитуд векторов поля E_{mx} и E_{my} (рис. 5.18), создаваемых соответствующими вибраторами. При этом:

- если $E_{mx} = 0$, то угол $\theta = 0^\circ$ и волна называется *горизонтально поляризованной*;
- если $E_{my} = 0$, то угол $\theta = 90^\circ$ и волна называется *вертикально поляризованной*;
- если $E_{mx} = E_{my}$, то угол $\theta = 45^\circ$.

Линейно-поляризованная волна имеет место также, если разность $\Delta\varphi$ фаз равна целому числу π , т. е.

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm n\pi,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

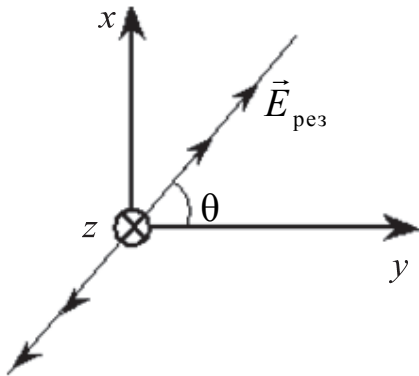


Рис. 5.17. Положение результирующего вектора $\vec{E}_{рез}$ для линейно-поляризованной волны

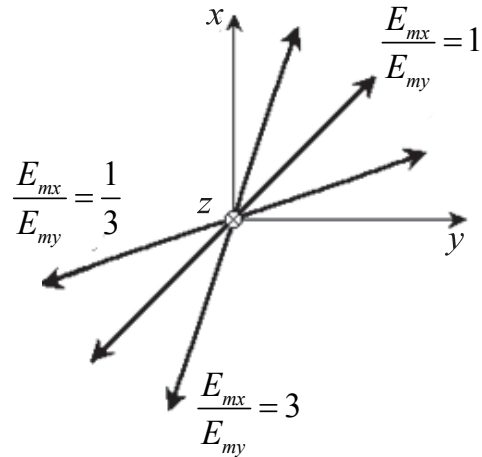


Рис. 5.18. Зависимость угла поляризации θ от отношения амплитуд векторов поля E_{mx} и E_{my} , создаваемых соответствующими

В этом случае угол θ поляризации определяется как

$$\theta = (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{E_{mx}}{E_{my}}.$$

Таким образом, условия получения линейно-поляризованной волны в результате сложения двух волн с линейной поляризацией:

$$\vec{\Pi}_1 \parallel \vec{\Pi}_2; \vec{E}_1 \perp \vec{E}_2; \omega_1 = \omega_2; E_{mx} = E_{my} \text{ или } E_{mx} \neq E_{my};$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm n\pi, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

5.3.2. Условия получения ЭМВ круговой поляризации

Предположим, что амплитуды электромагнитных волн **равны**, т. е.

$$E_{mx} = E_{my} = E_0,$$

а их начальные фазы отличаются на $\pi/2$, т. е.

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2.$$

Тогда

$$E_{рез} = \sqrt{E_0^2 \sin^2(\omega t - kz + \varphi_2) + E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \varphi_2)} E_0 = \text{const},$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{-E_0 \sin(\omega t - kz + \varphi_2)}{E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_2)} = \operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}(\omega t - kz + \varphi_2)) = -(\omega t - kz + \varphi_2).$$

Таким образом, результирующий вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ в фиксированной точке ($z = \text{const}$) пространства имеет постоянную амплитуду, а угол θ изменяется по закону $(-\omega t - \varphi_2)$, следовательно, вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ совершает равномерное вращательное движение, при этом конец вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ описывает окружность (рис. 5.14, а), т. е. в этом случае имеет место волна с **круговой поляризацией**.

Если разность фаз равна

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -\pi/2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 - \pi/2,$$

тогда

$$E_{\text{рез}} = E_0 = \text{const}, \theta = (\omega t - kz + \varphi_2),$$

т. е. в этом случае также имеет место волна с **круговой поляризацией**, но направление вращения конца вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ изменяется на противоположное.

Нетрудно убедиться, что если $E_{mx} = E_{my} = E_0$ и разность фаз кратна нечетному числу $\pi/2$, т. е.

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi/2 (2n + 1),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, то волна также будет иметь круговую поляризацию. Знак \pm указывает на направление вращения конца вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$, т. е. ЭМВ будет **правополяризованной** или **левополяризованной**.

Таким образом, условия получения волны с **круговой поляризацией** в результате сложения двух волн линейной поляризации:

$$\vec{P}_1 \parallel \vec{P}_2; \vec{E}_1 \perp \vec{E}_2; \omega_1 = \omega_2; E_{mx} = E_{my};$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pm \pi/2 (2n + 1), \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Любую линейно-поляризованную волну можно представить в виде суммы двух волн с круговой поляризацией различного направления вращения (рис. 5.19). Как видно из рис. 5.19, результирующий вектор $\vec{E}_{\text{рез}}$ в этом случае совершает колебательное движение вдоль прямой, т. е. волна является линейно-поляризованной.

5.3.3. Условия получения ЭМВ эллиптической поляризации

В случае, если не выполняются условия пп. 5.3.1 и 5.3.2, т. е.

$$E_{mx} = E_{my} \text{ или } E_{mx} \neq E_{my}, \text{ а } \Delta\varphi \neq n\pi \text{ и } \Delta\varphi \neq \pm \pi/2 (2n + 1);$$

$$\Delta\varphi \neq \pm \pi/2 (2n + 1), \text{ а } E_{mx} \neq E_{my}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots,$$

то в этом случае конец вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства описывает эллипс (см. рис. 5.14, б) или в пространстве эллиптическую спираль, т. е. имеет место ЭМВ *эллиптической* поляризации. Коэффициент поляризации P и наклон эллипса будут зависеть от соотношения разности фаз $\Delta\varphi$ и амплитуд E_{mx} и E_{my} . В качестве примера на рис. 5.20 показаны траектории, описываемые концом вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства в случаях:

1. $E_{mx}/E_{my} = \frac{1}{3}$; $\Delta\varphi = 90^\circ$, коэффициент $P = \frac{1}{3}$.
2. $E_{mx}/E_{my} = 1$; $\Delta\varphi = 45^\circ$, коэффициент $P = 0,415$.
3. $E_{mx}/E_{my} = 3$; $\Delta\varphi = 90^\circ$, коэффициент $P = \frac{1}{3}$.

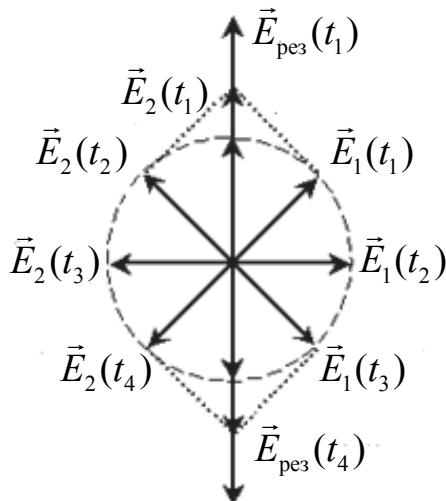


Рис. 5.19. Условия получения волны с круговой поляризацией

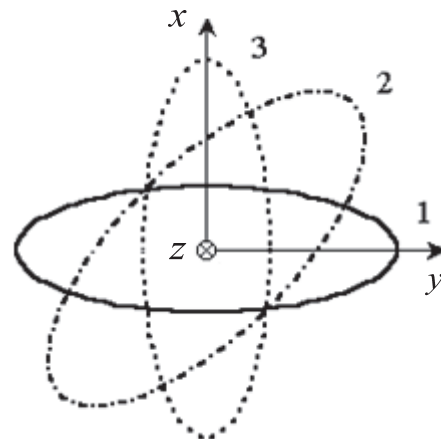


Рис. 5.20. Траектории, описываемые концом вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства

Примечания:

1. При рассмотрении вопроса поляризации плоской волны, полученной в результате сложения двух волн с линейной поляризацией распространяющихся в одном направлении, векторы \vec{E} которых взаимно перпендикулярны, одним из основных условий было равенство частот, т. е. $\omega_1 = \omega_2$.

При невыполнении этого условия конец вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства описывает фигуры Лиссажу. В качестве примера на рис. 5.21 показаны траектории, описываемые концом вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства в случаях:

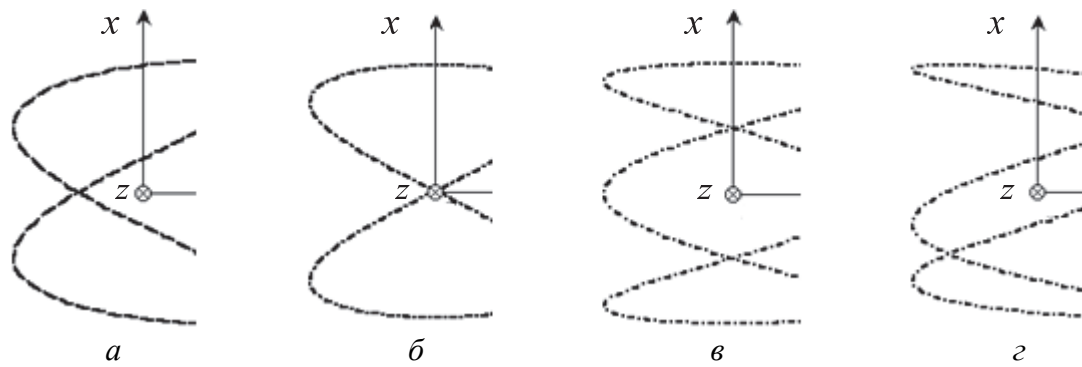


Рис. 5.21. Траектории, описываемые концом вектора $\vec{E}_{\text{рез}}$ в фиксированной ($z = \text{const}$) точке пространства

- а) $E_{mx}/E_{my} = 1, \Delta\varphi = 30^\circ, \omega_1 / \omega_2 = 2$;
- б) $E_{mx}/E_{my} = 1, \Delta\varphi = 45^\circ, \omega_1 / \omega_2 = 2$;
- в) $E_{mx}/E_{my} = 1, \Delta\varphi = 30^\circ, \omega_1 / \omega_2 = 3$;
- г) $E_{mx}/E_{my} = 1, \Delta\varphi = 45^\circ, \omega_1 / \omega_2 = 3$.

2. Следует отметить, что в тех случаях, когда анализируемая плоская волна не является однородной (например, в неоднородной среде), поляризация волны может быть различной в разных точках плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (оси z). Это объясняется тем, что амплитуда неоднородной плоской волны зависит от координат x и y , и при изменении последних меняется соотношение между составляющими E_{mx} и E_{my} .

3. При рассмотрении вопроса поляризации плоской волны проводился анализ относительно вектора \vec{E} . Очевидно, такой же анализ для вектора \vec{H} приведет к аналогичным результатам.

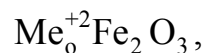
5.4. Плоские электромагнитные волны в анизотропных и неоднородных средах

В анизотропных средах, как указывалось в гл. 1, электромагнитные параметры ϵ_a, μ_a и σ различны в различных направлениях. Следовательно, в такой среде направление векторов поля волны и переносимая ею электромагнитная энергия будут зависеть от направления, по которому пришла волна в точку наблюдения. Примером анизотропных сред, широко применяющихся в радиотехнике на сверхвысоких частотах, являются *намагниченные ферриты*. Причины анизотропии кроются в микроструктуре вещества и достаточно строго обосновываются квантовой теорией.

Не вдаваясь в детальный анализ причин анизотропии, отметим, что принцип действия ферритовых устройств основан на взаимодействии магнитного поля электромагнитной волны с нескомпенсированными магнитными моментами атомов. Чтобы такое взаимодействие стало возможным, электромагнитная волна должна проникать в вещество, обладающее магнитными свойствами, и распространяться в нем. В проводник электромагнитные волны почти не проникают, поэтому, например, чистое железо не пригодно для использования в подобных устройствах. Эту трудность можно устранить, если применять обладающие свойствами диэлектриков химические соединения ферромагнитных металлов (обычно железо) с другими элементами. Подобные магнитные диэлектрики называются ферритами.

Внешне феррит напоминает керамику и представляет собой сложный твердый раствор, получаемый спеканием трехвалентного железа и двухвалентных металлов, например: никеля, марганца, меди, цинка и др. При отсутствии внешнего постоянного подмагничивающего поля ферриты характеризуются параметрами $\varepsilon = 5-20$, $\mu = 10-2\ 000$, $\sigma = 10^{-8}-10^{-11}$ См/м.

Состав простейших ферритов описывается следующей химической формулой:



где Me_o^{+2} – ион двухвалентного металла типа Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd и др.

В феррите анизотропия проявляется в его магнитной проницаемости. При отсутствии внешнего подмагничивающего поля феррит изотропен, т. е. уравнение среды определяется в соответствии с выражением (1.3).

Если же феррит намагнитить постоянным магнитным полем \vec{H}_0 , например, параллельным оси Z ($\vec{H}_0 = \vec{z}^\circ H_0$), то магнитная проницаемость для переменного магнитного поля будет разной для различных направлений. Уравнение среды в этом случае приобретает вид

$$\vec{B} = \vec{\mu}_a \vec{H}, \quad (5.53)$$

где $\vec{\mu}_a$ – тензор магнитной проницаемости.

Тензор магнитной проницаемости феррита можно представить в следующей форме:

$$\vec{\mu}_a = \begin{pmatrix} \mu_a & -j\alpha & 0 \\ j\alpha & \mu_a & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

где μ_a , α и μ_z – комплексные величины, мнимые части которых характеризуют различные виды магнитных потерь.

Рассмотрим особенности распространения плоской однородной волны в продольно-намагниченном феррите.

Пусть имеется однородная безграничная ферритовая среда, свободная от источников ($\dot{\vec{J}}_{мст} = 0$ и $\dot{\rho}_{мст} = 0$) и потерь ($\sigma = 0$), намагниченная постоянным магнитным полем \vec{H}_0 вдоль направления распространения плоской волны (вдоль оси Z).

Решению подлежат первое (2.46) и второе (2.47) уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \dot{\vec{H}} = j\omega\epsilon_a \dot{\vec{E}}; \quad \text{rot } \dot{\vec{E}} = -j\omega\vec{\mu}_a \dot{\vec{H}},$$

которые в декартовой системе координат с учетом (5.54) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_x; \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_y; \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_z; \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j\omega(\mu_a \dot{H}_x - j\alpha \dot{H}_y); \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j\omega(j\alpha \dot{H}_x + \mu_a \dot{H}_y); \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j\omega(\mu_z \dot{H}_z). \end{array} \right\} \quad (5.55)$$

Так как для плоской однородной волны выполняется условие $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, то из (5.55) получаем

$$\dot{E}_z = \dot{H}_z = 0. \quad (5.56)$$

Следовательно, в продольно-намагниченном феррите распространяется поперечная волна типа «Т», поэтому ориентация векторов поля относительно координатных осей может быть записана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vec{H}} = \vec{x}^\circ \dot{H}_x(0)e^{j(\omega t - \beta z)} + \vec{y}^\circ \dot{H}_y(0)e^{j(\omega t - \beta z)}; \\ \dot{\vec{E}} = \vec{x}^\circ \dot{E}_x(0)e^{j(\omega t - \beta z)} + \vec{y}^\circ \dot{E}_y(0)e^{j(\omega t - \beta z)}, \end{array} \right. \quad (5.57)$$

где $\dot{H}_x(0)$, $\dot{H}_y(0)$, $\dot{E}_x(0)$, $\dot{E}_y(0)$ – составляющие комплексных амплитуд поля в плоскости $z = 0$;

β – коэффициент фазы или постоянная распространения волны в ферритовой среде.

Определим значение постоянной распространения β для плоской волны в ферритовой среде.

Подставляя (5.57) в (5.55), получим следующую систему уравнений в комплексных амплитудах:

$$\begin{cases} j\beta \dot{H}_y(0) = j\omega \varepsilon_a \dot{E}_x(0); \\ j\beta \dot{E}_y(0) = -j\omega [\mu_a \dot{H}_x(0) - j\alpha \dot{H}_y(0)]; \\ j\beta \dot{H}_x(0) = -j\omega \varepsilon_a \dot{E}_y(0); \\ j\beta \dot{E}_x(0) = j\omega [j\alpha \dot{H}_x(0) + \mu_a \dot{H}_y(0)]. \end{cases} \quad (5.58)$$

Исключая из (5.58) $\dot{E}_x(0) = \frac{\dot{H}_y(0)}{\omega \varepsilon_a}$ и $\dot{E}_y(0) = -\frac{\beta \dot{H}_x(0)}{\omega \varepsilon_a}$, получим

$$\begin{cases} (\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a) \dot{H}_x(0) = -j \omega^2 \varepsilon_a \alpha \dot{H}_y(0); \\ (\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a) \dot{H}_y(0) = j \omega^2 \varepsilon_a \alpha \dot{H}_x(0). \end{cases} \quad (5.59)$$

Перемножив уравнения в (5.59), получим

$$(\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_a \mu_a)^2 = \omega^4 \varepsilon_a^2 \alpha^2, \quad (5.60)$$

откуда

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \pm \omega^2 \varepsilon_a \alpha = \omega^2 \varepsilon_a (\mu_a \pm \alpha). \quad (5.61)$$

Из выражения (5.61) видно, что для волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси Z продольно-намагниченного феррита, существуют два значения постоянной распространения β :

$$\beta^- = \omega \sqrt{\varepsilon_a (\mu_a + \alpha)} \quad \text{и} \quad \beta^+ = \omega \sqrt{\varepsilon_a (\mu_a - \alpha)} \quad (5.62)$$

и, следовательно, существуют два рода волн с различными фазовыми скоростями:

$$v_{\Phi}^- = \frac{\omega}{\beta^-} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a (\mu_a + \alpha)}}, \quad v_{\Phi}^+ = \frac{\omega}{\beta^+} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a (\mu_a - \alpha)}}.$$

После подстановки (5.62) в одно из уравнений (5.59) получим

$$\dot{H}_y(0) = \pm j \dot{H}_x(0) = \pm j \dot{H}(0). \quad (5.63)$$

Из (5.63) следует, что компоненты $\dot{H}_y(0)$ и $\dot{H}_x(0)$ равны по амплитуде и сдвинуты по фазе на угол $\pm \pi/2$. Следовательно, результирующее поле будет представлять две волны круговой поляризации различного направления вращения, распространяющиеся со скоростями v_{Φ}^+ и v_{Φ}^- . Эти коле-

бания, как видно из (5.57), описываются выражениями для левой и правой поляризации соответственно:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}^- = \dot{H}(0)(\vec{x}^\circ + j\vec{y}^\circ)e^{j(\omega t - \beta^- z)}; \\ \dot{\vec{H}}^+ = \dot{H}(0)(\vec{x}^\circ - j\vec{y}^\circ)e^{j(\omega t - \beta^+ z)}. \end{cases} \quad (5.64)$$

Аналогично для напряженности электрического поля из (5.57) с учетом (5.63) получим:

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}}^- = \dot{E}(0)(\vec{x}^\circ + j\vec{y}^\circ)e^{j(\omega t - \beta^- z)}; \\ \dot{\vec{E}}^+ = \dot{E}(0)(\vec{x}^\circ - j\vec{y}^\circ)e^{j(\omega t - \beta^+ z)}. \end{cases} \quad (5.65)$$

Проведем теперь некоторые вспомогательные рассуждения относительно вектора напряженности магнитного поля \vec{H} . Из (5.62) видно, что феррит проявляет различные свойства по отношению к электромагнитному полю, так как величина $\mu_a^+ = \mu_a - \alpha$ не равна $\mu_a^- = \mu_a + \alpha$.

Пусть, например, в продольно-намагниченном феррите¹⁹ возбуждена линейно поляризованная волна, вектор магнитного поля \vec{H} у которой совпадает с осью x (рис. 5.22).

Представим линейно-поляризованную волну в виде суммы двух волн равной амплитуды, поляризованных по кругу в противоположных направлениях. Волны \vec{H}^+ и \vec{H}^- имеют различные постоянные распространения (5.62).

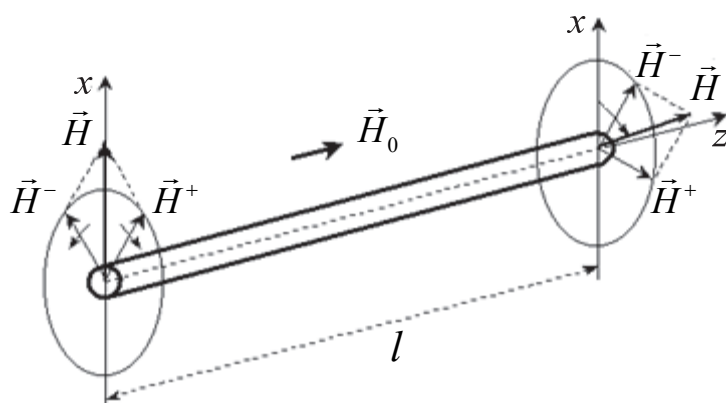


Рис. 5.22. Возбужденная линейно-поляризованная волна в продольно-намагниченном феррите

¹⁹ Феррит называется продольно-намагниченным, если вектор внешнего подмагничивающего поля \vec{H}_0 коллинеарен вектору Пойнтинга $\vec{\Pi}$ распространяющейся в феррите ЭМВ.

Пройдя вдоль оси Z один и тот же путь l , волны получают различные фазовые сдвиги:

- $\beta^+ l$ – для правополяризованной волны и
- $\beta^- l$ – для левополяризованной волны.

По этой причине результирующий вектор \vec{H} в точке с координатой $z = l$ не будет совпадать с осью x , а будет отклонен от него на некоторый угол θ , рад, называемый углом поворота плоскости поляризации.

Таким образом, обобщая вышеизложенное, можно сформулировать чрезвычайно важный для практики вывод. *Если в продольно-намагниченном феррите распространяется линейно-поляризованная волна, то она может быть представлена в виде суммы двух волн круговой поляризации правого и левого направления вращения. А так как их фазовые скорости при прохождении через феррит окажутся разными, то плоскость поляризации результирующей волны поворачивается на угол*

$$\theta = 0,5 (\beta^- - \beta^+)l. \quad (5.66)$$

Описанное явление поворота плоскости поляризации в продольно-намагниченном феррите получило название *эффекта Фарадея*. Среда, в которой наблюдается эффект Фарадея, называется *гиротропной* (вращающей).

Величина

$$R = 0,5 (\beta^- - \beta^+)$$

определяет угол поворота плоскости поляризации на единицу длины и называется *постоянной Фарадея*. Она зависит от свойств феррита и величины постоянного подмагничивающего поля \vec{H}_0 .

Эффект Фарадея широко используется в ряде устройств, в так называемых ферритовых «вентильях» и «циркуляторах». Такие устройства будут подробно рассмотрены при изучении элементов техники СВЧ.

Кроме намагниченного феррита гиротропными свойствами обладают и другие среды, например, ионосфера, находящаяся в магнитном поле Земли. Однако в этом случае тензором будет являться абсолютная диэлектрическая проницаемость среды

$$\vec{\epsilon}_a = \begin{pmatrix} \epsilon_a & -j\beta & 0 \\ j\beta & \epsilon_a & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Замечательным свойством эффекта Фарадея является его *необратимость*. *Необратимость эффекта Фарадея* заключается в том, что *направление поворота плоскости поляризации не зависит от направления рас-*

пространения электромагнитной волны. При любом направлении распространения волны (прямом или обратном) на участке длиной l поворот плоскости поляризации происходит в одну и ту же сторону и на один и тот же угол. Это свойство широко используется при конструировании устройств техники СВЧ на ферритах. Такие устройства называются невзаимными.

Следует отметить, что в невзаимных устройствах изменение направления поворота плоскости поляризации достигается изменением направления постоянного подмагничивающего поля \vec{H}_0 .

5.5. Законы отражения и преломления плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела двух однородных сред

В предыдущих главах рассматривалось распространение электромагнитных волн в однородных безграничных средах. В сущности, мы исследовали простейшую, но важную теоретическую модель электромагнитного процесса, открывающую черты реальных явлений. Реальное электромагнитное поле существует в области пространства, имеющей различного рода границы раздела (поверхности моря, земли, стенки волновода и т. д.). Поэтому на структуру поля и характер распространения волны существенно влияет граница раздела сред, обладающих разными свойствами. Попадая на границу раздела двух сред, электромагнитная волна может частично (или полностью) отразиться либо частично (или полностью) пройти в другую среду. Кроме того, возможно и более сложное явление, называемое *дифракцией волн*.

Определение поля, возникающего при падении какой-либо электромагнитной волны на границу раздела двух сред, в общем случае (при сложной конфигурации поверхности раздела) сопряжено с большими математическими трудностями. Рассмотрим простейшую задачу такого типа: наклонное падение плоской электромагнитной волны на плоскую бесконечно протяженную границу раздела двух однородных изотропных сред (рис. 5.23).

Ограничимся рассмотрением линейно-поляризованных волн, так как волны с круговой и эллиптической поляризацией можно представить (см. п.п. 5.3.2 и 5.3.3) в виде суперпозиции двух линейно-поляризованных плоских волн.

Прежде чем перейти к анализу волновых явлений на границе раздела двух сред, введем некоторые определения.

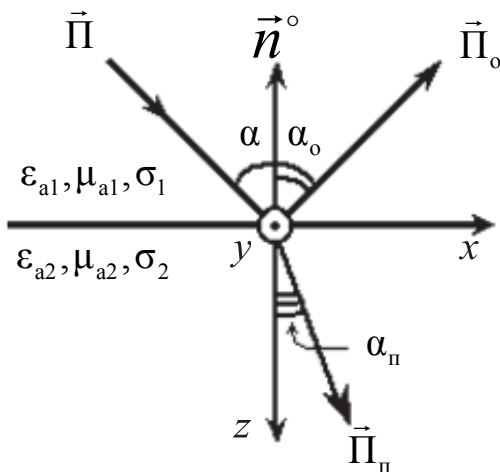


Рис. 5.23. Наклонное падение плоской электромагнитной волны на плоскую бесконечно протяженную границу раздела двух однородных изотропных сред

Пусть имеется плоская граница раздела двух сред, каждая из которых занимает целое полупространство и характеризуется параметрами ϵ_a , μ_a и σ . Из первой среды (ϵ_{a1} , μ_{a1} , σ_1) на плоскую границу раздела со второй (ϵ_{a2} , μ_{a2} , σ_2) средой падает плоская линейно-поляризованная волна. Выберем оси координат, как показано на рис. 5.23.

*Плоскость, проходящая через нормаль \vec{n}^0 к границе раздела двух сред и вектор Пойнтинга \vec{P} падающей волны, называется **плоскостью падения**.*

Аналогично можно дать определения для плоскостей **отражения** и **преломления**. При этом векторы \vec{P}_0 и \vec{P}_n называются векторами Пойнтинга отраженной и преломленной волн соответственно.

*Угол между нормалью \vec{n}^0 к границе раздела двух сред и вектором Пойнтинга \vec{P} падающей, \vec{P}_0 – отраженной и \vec{P}_n – преломленной волн называется, соответственно, **углом падения α** , **углом отражения α_0** и **углом преломления α_n** .*

Вектор напряженности \vec{E} электрического поля плоской волны всегда (см. выражение (3.4)) перпендикулярен направлению распространения, т. е. вектору \vec{P} , а по отношению к плоскости падения может быть ориентирован произвольно. Так как вектор \vec{E} всегда можно представить в виде двух составляющих, одна из которых лежит в плоскости падения, а другая перпендикулярна ей, то, не нарушая общности анализа, ограничимся рассмотрением этих двух ориентаций вектора \vec{E} . В соответствии с этим

- плоскую ЭМВ, вектор \vec{E} которой расположен в **плоскости падения**, называют **вертикально поляризованной волной** (рис. 5.24, а);
- плоскую ЭМВ, вектор \vec{E} которой **перпендикулярен** плоскости падения, называют **горизонтально поляризованной волной** (рис. 5.24, б).

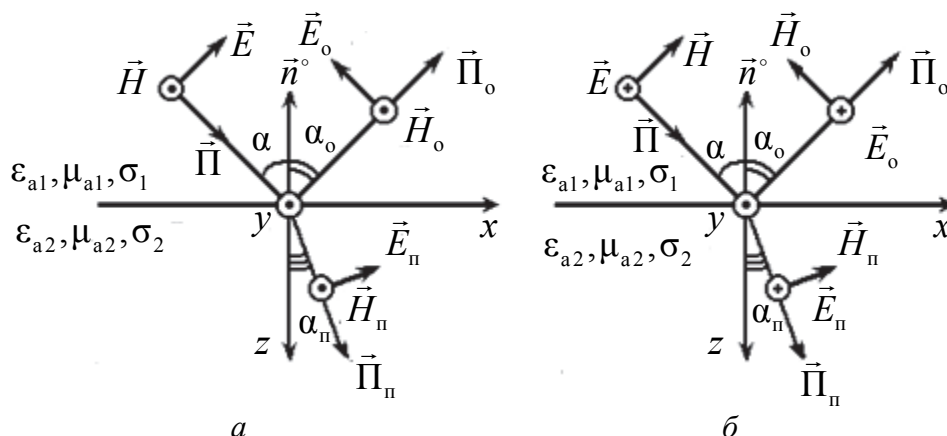


Рис. 5.24. К определению понятия: *a* – вертикально поляризованная волна, *б* – горизонтально поляризованная волна

Установим законы, которым подчиняются электромагнитные волны вертикальной и горизонтальной поляризации при их наклонном падении на плоскую границу раздела двух однородных изотропных сред.

5.5.1. Коэффициенты отражения и преломления при вертикальной поляризации

Изобразим прежде всего ориентацию векторов поля в декартовой системе координат, как показано на рис. 5.25.

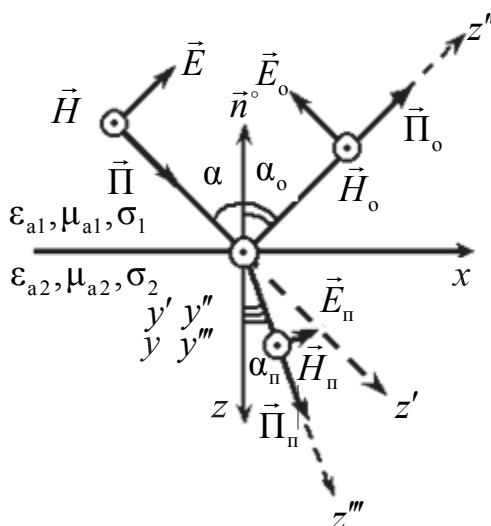


Рис. 5.25. Ориентация векторов поля в декартовой системе координат

Оси координат z' , z'' и z''' совпадают с направлениями распространения падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Оси координат y' , y'' и y''' имеют одно и то же направление, совпадающее с на-

правлением оси y декартовой системы координат, начало которой совпадает с точкой падения. Направления осей x' , x'' , x''' (на рис. 5.25 не показаны) выбираются такими, чтобы при соответствующих направлениях осей z' , z'' , z''' и y' , y'' , y''' всегда имела место правовинтовая система координат.

Запишем в представленных на рис. 5.25 системах координат выражения для комплексных амплитуд векторов поля:

- падающей волны

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_m = \vec{y}'^\circ \frac{A}{Z_1} e^{-jk_1 z'}; \\ \dot{\vec{E}}_m = \vec{x}'^\circ A e^{-jk_1 z'}; \end{cases} \quad (5.67)$$

- отраженной волны

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_o = \vec{y}''^\circ \frac{B}{Z_1} e^{-jk_1 z''}; \\ \dot{\vec{E}}_o = \vec{x}''^\circ B e^{-jk_1 z''}; \end{cases} \quad (5.68)$$

- преломленной волны

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_\Pi = \vec{y}'''^\circ \frac{C}{Z_2} e^{-jk_2 z'''}; \\ \dot{\vec{E}}_\Pi = \vec{x}'''^\circ C e^{-jk_2 z'''}; \end{cases} \quad (5.69)$$

Для анализа целесообразно взять тот вектор поля, который в заданной системе координат содержит меньше составляющих. Для случая **вертикальной поляризации** таким вектором является \vec{H} , ориентированный вдоль оси y .

Введем понятие коэффициентов отражения и преломления. *Коэффициентом R отражения (r преломления) называется отношение комплексной амплитуды поля отраженной (преломленной) волны к комплексной амплитуде поля падающей волны на границе раздела двух сред (при $z = 0$).*

С учетом введенного определения для вертикально поляризованной плоской ЭМВ коэффициент отражения определяется как

$$\dot{R}_B = \frac{\dot{H}_{mo}(0)}{\dot{H}_m(0)} = \frac{\dot{E}_o(0)}{\dot{E}_m(0)} = \frac{B}{A}, \quad (5.70)$$

а коэффициент преломления

$$\dot{r}_B = \frac{\dot{H}_m(0)}{\dot{H}_m(0)} = \frac{\dot{E}_m(0)}{\dot{E}_m(0)} = \frac{C}{A}, \quad (5.71)$$

где индекс «в» означает принадлежность к вертикально поляризованной волне.

Из рис. 5.25 видно, что направления распространения падающей, отраженной и преломленной волн (направления осей z' , z'' и z''') не совпадают с направлением оси z основной системы координат. Ранее для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в однородной безграничной среде, направление распространения волны всегда выбиралось вдоль направления оси Z .

Поэтому произведем пересчет «штрихованных» координат, в которых записаны выражения (5.67)–(5.69), к основной системе координат (x, y, z) , учтя при этом углы поворота «штрихованных» осей:

$$z' \rightarrow \alpha, z'' \rightarrow 180^\circ - \alpha_0, z''' \rightarrow \alpha_n. \quad (5.72)$$

Найдем сначала формулы пересчета для осей X', Y', Z' . Из рис. 5.26 следует, что

$$y = y', \quad z' = x \sin \alpha + z \cos \alpha, \quad x' = x \cos \alpha - z \sin \alpha. \quad (5.73)$$

Для получения формул пересчета координат x'', y'', z'' и x''', y''', z''' к основной системе координат необходимо в (5.73) учесть соотношение (5.72), т. е. α заменить соответственно на $180^\circ - \alpha_0$ и α_n .

Таким образом, с учетом формул (5.72) и (5.73) пересчета «штрихованных» координат к основной системе координат выражения для комплексных амплитуд поля (5.67)–(5.69) можно записать в следующем виде.

Для падающей волны:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_m = \vec{y}^\circ \frac{A}{Z_1} e^{-jk_1(x \sin \alpha + z \cos \alpha)}, \\ \dot{\vec{E}}_m = (\vec{x}^\circ \cos \alpha - \vec{z}^\circ \sin \alpha) A e^{-jk_1(x \sin \alpha + z \cos \alpha)}. \end{cases} \quad (5.74)$$

Для отраженной волны:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_0 = \vec{y}^\circ \frac{B}{Z_1} e^{-jk_1(x \sin \alpha_0 - z \cos \alpha_0)}, \\ \dot{\vec{E}}_0 = (-\vec{x}^\circ \cos \alpha_0 - \vec{z}^\circ \sin \alpha_0) B e^{-jk_1(x \sin \alpha_0 - z \cos \alpha_0)}. \end{cases} \quad (5.75)$$

Для преломленной волны:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_{m_n} = \vec{y}^\circ \frac{C}{Z_2} e^{-jk_2(x \sin \alpha_n + z \cos \alpha_n)}, \\ \dot{\vec{E}}_{m_n} = (\vec{x}^\circ \cos \alpha_n - \vec{z}^\circ \sin \alpha_n) C e^{-jk_2(x \sin \alpha_n + z \cos \alpha_n)}. \end{cases} \quad (5.76)$$

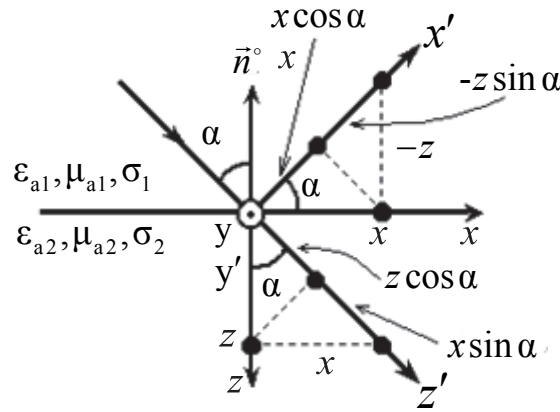


Рис. 5.26. Направления распространения падающей, отраженной и преломленной волн

С учетом коэффициентов отражения и преломления (5.70) и (5.71) из выражений (5.75) и (5.76) получим

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_{m_0} = \vec{y}^0 \dot{R}_B \frac{A}{Z_1} e^{-jk_1(x \sin \alpha_0 - z \cos \alpha_0)}; \\ \dot{\vec{H}}_{m_0} = \vec{y}^0 \dot{r}_B \frac{A}{Z_2} e^{-jk_2(x \sin \alpha_n + z \cos \alpha_n)}. \end{cases} \quad (5.77)$$

Для определения углов отражения α_0 и преломления α_n , коэффициентов \dot{R}_B и \dot{r}_B используем граничное условие (2.39), которое предполагает равенство тангенциальных составляющих полного магнитного поля в первой и второй средах, т. е. $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$. Полное магнитное поле в первой среде складывается из полей падающей и отраженной волн. Во второй среде существует лишь поле преломленной волны. В рассматриваемом случае (рис. 5.25) векторы \vec{H} , \vec{H}_0 , \vec{H}_n ориентированы одинаково и являются **тангенциальными** по отношению к границе раздела. В силу этого граничное условие (2.39) запишется в виде

$$\vec{H}_m(0) + \vec{H}_{m_0}(0) = \vec{H}_{m_n}(0) \quad (5.78)$$

или с учетом выражений (5.74) и (5.77) при $z = 0$ получим

$$e^{-jk_1 x \sin \alpha} + \dot{R}_B e^{-jk_1 x \sin \alpha_0} = \dot{r}_B \frac{Z_1}{Z_2} e^{-jk_2 x \sin \alpha_n}. \quad (5.79)$$

Граничные условия (5.78) должны выполняться на всей поверхности раздела и не должны зависеть от координаты x , так как никаких дополнительных ограничений мы не налагали. Это возможно только в том случае,

если зависимость вектора \vec{H} от переменной x во всех трех волнах одинакова, т. е. равенство (5.79) возможно при соблюдении условий

$$k_1 \sin \alpha = k_1 \sin \alpha_0 = k_2 \sin \alpha_{\text{п}}, \quad (5.80)$$

откуда следует, что

$$1 + \dot{R}_{\text{в}} = \dot{r}_{\text{в}} \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (5.81)$$

Из условия (5.80) вытекают законы Снеллиуса, известные из геометрической оптики, в которой отсутствует понятие волны, а рассматриваются лучи. Законы Снеллиуса были открыты экспериментально.

1. Угол падения α равен углу отражения α_0 , т. е.

$$\alpha = \alpha_0. \quad (5.82)$$

Отражения, при которых справедлив первый (5.82) закон Снеллиуса, называются зеркальными.

2. Отношение синуса угла преломления $\alpha_{\text{п}}$ к синусу угла падения α равно отношению коэффициентов k_1 распространения в первой и k_2 во второй средах, т. е.

$$\frac{\sin \alpha_{\text{п}}}{\sin \alpha} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (5.83)$$

В общем случае в проводящей ($\sigma \neq 0$) среде коэффициент k фазы будет величиной комплексной (5.18), откуда следует, что угол преломления $\alpha_{\text{п}}$ может быть комплексным.

Для случая идеальных ($\sigma = 0$) диэлектрических сред применим второй закон Снеллиуса: отношение синуса угла преломления $\alpha_{\text{п}}$ к синусу угла падения α равно относительному показателю преломления сред, т. е.

$$\frac{\sin \alpha_{\text{п}}}{\sin \alpha} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}}}{\sqrt{\epsilon_{a2} \mu_{a2}}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}, \quad (5.85)$$

где $n_1 = c / v_{\phi 1}$ и $n_2 = c / v_{\phi 2}$ – показатели преломления первой и второй сред соответственно;

n_{12} – относительный показатель преломления.

Таким образом, полученные выше законы Снеллиуса указывают направления, в которых должна распространяться отраженная и преломленная волны при заданном направлении падающей волны. Но еще не найдены амплитудные и фазовые соотношения волн. Для этого необходимо определить коэффициенты отражения и преломления $\dot{R}_{\text{в}}$ и $\dot{r}_{\text{в}}$.

Равенство (5.81) является первым уравнением с двумя неизвестными коэффициентами $\dot{R}_{\text{в}}$ и $\dot{r}_{\text{в}}$. Для определения этих коэффициентов необхо-

димо вывести второе уравнение, которое может быть получено из граничных условий для тангенциальной составляющей напряженности электрического поля E_τ (2.33). Учитывая рис. 5.25, граничные условия (2.33) для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля вертикально поляризованной волны можно записать

$$\dot{E}_{m\tau}(0) + \dot{E}_{m\tau_0}(0) = \dot{E}_{m\tau\pi}(0). \quad (5.86)$$

Определим тангенциальные составляющие напряженности электрического поля из соотношений (5.74)–(5.76) с учетом (5.70) и (5.71) при $z = 0$ и $\vec{z}^\circ = 0$:

$$\begin{cases} \dot{E}_{m\tau} = \cos \alpha A e^{-jk_1 x \sin \alpha}; \\ \dot{E}_{m\tau_0} = -\cos \alpha_0 \dot{R}_B A e^{-jk_1 x \sin \alpha_0}; \\ \dot{E}_{m\tau\pi} = \cos \alpha_\pi \dot{r}_B A e^{-jk_2 x \sin \alpha_\pi}. \end{cases} \quad (5.87)$$

Подставив (5.87) в (5.86), получим

$$\cos \alpha e^{-jk_1 x \sin \alpha} - \cos \alpha_0 \dot{R}_B e^{-jk_1 x \sin \alpha_0} = \cos \alpha_\pi \dot{r}_B e^{-jk_2 x \sin \alpha_\pi}. \quad (5.89)$$

Граничные условия (5.89) должны выполняться на всей поверхности раздела и не должны зависеть от координаты x , что возможно только при соблюдении условий (5.80), т. е. получаем:

$$\cos \alpha - \cos \alpha_0 \dot{R}_B = \cos \alpha_\pi \dot{r}_B,$$

откуда с учетом первого (5.82) закона Снеллиуса следует, что

$$(1 - \dot{R}_B) \cos \alpha = \dot{r}_B \cos \alpha_\pi. \quad (5.90)$$

Таким образом, выражения (5.81) и (5.90) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 1 + \dot{R}_B = \dot{r}_B \frac{Z_1}{Z_2}; \\ (1 - \dot{R}_B) \cos \alpha = \dot{r}_B \cos \alpha_\pi, \end{cases}$$

разрешая которую относительно \dot{R}_B и \dot{r}_B , получим

$$\begin{cases} \dot{R}_B = \frac{Z_1 \cos \alpha - Z_2 \cos \alpha_\pi}{Z_1 \cos \alpha + Z_2 \cos \alpha_\pi}; \\ \dot{r}_B = \frac{2Z_2 \cos \alpha}{Z_1 \cos \alpha + Z_2 \cos \alpha_\pi}. \end{cases} \quad (5.91)$$

Выражения (5.91) для коэффициентов отражения и преломления называют коэффициентами Френеля при вертикальной поляризации плоской электромагнитной волны. Детальный анализ коэффициентов Френеля будет проведен ниже.

Таким образом, при падении на плоскую границу раздела двух сред плоской вертикально поляризованной волны возбуждаются отраженная и преломленная волны, направления распространения которых определяются законами Снеллиуса, а комплексные амплитуды (т. е. амплитуды и фазы) – коэффициентами Френеля (5.91).

Перейдем к рассмотрению случая горизонтальной поляризации падающей плоской волны.

5.5.2. Коэффициенты отражения и преломления при горизонтальной поляризации

В случае горизонтальной поляризации вектор \vec{E} падающей волны параллелен плоской границе раздела двух сред и, следовательно, **перпендикулярен** плоскости падения (рис. 5.27).

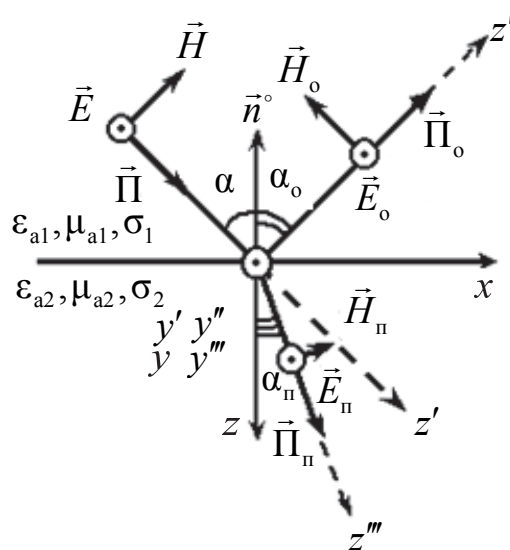


Рис. 5.27. Ориентация векторов поля в декартовой системе координат в случае горизонтальной поляризации вектор \vec{E} падающей волны

Поэтому коэффициенты отражения и преломления запишутся в следующем виде:

коэффициент отражения:

$$\dot{R}_r = \frac{\dot{E}_{m_o}(0)}{\dot{E}_m(0)} = \frac{\dot{H}_{m_o}(0)}{\dot{H}_m(0)} = \frac{B}{A}, \quad (5.92)$$

а коэффициент преломления:

$$\dot{r}_\Gamma = \frac{\dot{E}_{m_o}(0)}{\dot{E}_m(0)} = \frac{\dot{H}_{m_\Pi}(0)}{\dot{H}_m(0)} = \frac{C}{A}, \quad (5.93)$$

где индекс «Г» означает принадлежность к горизонтально поляризованной волне.

Выражение для комплексных амплитуд поля с учетом пересчета «штрихованных» координат аналогично (4.23), (4.24) и (4.25) можно представить следующим образом:

- для падающей волны:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_m = (\vec{x}^\circ \cos \alpha - \vec{z}^\circ \sin \alpha) A e^{-jk_1(x \sin \alpha + z \cos \alpha)}; \\ \dot{\vec{E}}_m = -\vec{y}^\circ Z_1 A e^{-jk_1(x \sin \alpha + z \cos \alpha)}; \end{cases} \quad (5.94)$$

- для отраженной волны:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_{m_o} = (-\vec{x}^\circ \cos \alpha_o - \vec{z}^\circ \sin \alpha_o) B e^{-jk_1(x \sin \alpha_o - z \cos \alpha_o)}; \\ \dot{\vec{E}}_{m_\Pi} = -\vec{y}^\circ Z_1 B e^{-jk_1(x \sin \alpha_o - z \cos \alpha_o)}; \end{cases} \quad (5.95)$$

- для преломленной волны:

$$\begin{cases} \dot{\vec{H}}_{m_\Pi} = (\vec{x}^\circ \cos \alpha_\Pi - \vec{z}^\circ \sin \alpha_\Pi) C e^{-jk_2(x \sin \alpha_\Pi + z \cos \alpha_\Pi)}; \\ \dot{\vec{E}}_{m_\Pi} = -\vec{y}^\circ Z_2 C e^{-jk_2(x \sin \alpha_\Pi + z \cos \alpha_\Pi)}. \end{cases} \quad (5.96)$$

После подстановки тангенциальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{H} из (5.94), (5.95) и (5.96) в выражения для граничных условий

$$\dot{H}_{m_\tau}(0) + \dot{H}_{m_{\tau o}}(0) = \dot{H}_{m_{\tau \Pi}}(0) \text{ и } \dot{E}_m(0) + \dot{E}_{m_o}(0) = \dot{E}_{m_\Pi}(0)$$

с учетом выражений (5.92) и (5.93), получим систему уравнений

$$\begin{cases} (1 - \dot{R}_\Gamma) \cos \alpha = \dot{r}_\Gamma \cos \alpha_\Pi; \\ (1 + \dot{R}_\Gamma) Z_1 = \dot{r}_\Gamma Z_2. \end{cases} \quad (5.97)$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{cases} \dot{R}_\Gamma = \frac{Z_2 \cos \alpha - Z_1 \cos \alpha_\Pi}{Z_2 \cos \alpha + Z_1 \cos \alpha_\Pi}; \\ \dot{r}_\Gamma = \frac{2Z_2 \cos \alpha}{Z_2 \cos \alpha + Z_1 \cos \alpha_\Pi}. \end{cases} \quad (5.98)$$

Выражения (5.91) и (5.98) для коэффициентов отражения и преломления называют **коэффициентами Френеля** при вертикальной и горизонтальной соответственно поляризациях плоской электромагнитной волны, которые характеризуют амплитудно-фазовые характеристики волнового процесса на границе раздела сред.

Выражения (5.91) и (5.98) справедливы и в случае, когда хотя бы одна из сред обладает проводимостью, не равной нулю ($\sigma \neq 0$). Тогда величины $\dot{\epsilon}_a, \dot{\mu}_a, \dot{k}, \dot{Z}$ будут величинами комплексными. Выразим коэффициенты Френеля через параметры сред и угол α падения, для чего преобразуем второй (5.83) закон Снеллиуса к виду

$$\sin \alpha_{\text{п}} = \frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2} \sin \alpha.$$

Поскольку $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, то

$$\cos \alpha_{\text{п}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2}\right)^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\dot{k}_2} \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2} = \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{a1} \dot{\mu}_{a1}}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{a2} \dot{\mu}_{a2}}} \Rightarrow \dot{k}_2 = \dot{k}_1 \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{a2} \dot{\mu}_{a2}}}{\sqrt{\dot{\epsilon}_{a1} \dot{\mu}_{a1}}},$$

получаем

$$\cos \alpha_{\text{п}} = \frac{\sqrt{\dot{\epsilon}_{a1} \dot{\mu}_{a1}}}{\dot{k}_1 \sqrt{\dot{\epsilon}_{a2} \dot{\mu}_{a2}}} \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}.$$

Подставляя полученное выражение для $\cos \alpha_{\text{п}}$ и выражение (4.14) для случая сред с потерями в (5.91) и (5.98), получим формулы коэффициентов отражения и преломления для вертикальной и горизонтальной поляризаций плоской волны:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\text{в}} &= \frac{\dot{\epsilon}_{a2} \dot{k}_1 \cos \alpha - \dot{\epsilon}_{a1} \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}}{\dot{\epsilon}_{a2} \dot{k}_1 \cos \alpha + \dot{\epsilon}_{a1} \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}}; \\ \dot{r}_{\text{в}} &= \frac{2\dot{\epsilon}_{a1} \dot{k}_2 \cos \alpha}{\dot{\epsilon}_{a2} \dot{k}_1 \cos \alpha + \sqrt{\dot{\epsilon}_{a1}} \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (5.99)$$

и

$$\dot{R}_{\text{г}} = \frac{\dot{\mu}_{a2} \dot{k}_1 \cos \alpha - \dot{\mu}_{a1} \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}}{\dot{\mu}_{a2} \dot{k}_1 \cos \alpha + \dot{\mu}_{a1} \sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}};$$

$$\dot{r}_r = \frac{2\dot{\mu}_{a2}\dot{k}_1 \cos \alpha}{\dot{\mu}_{a2}\dot{k}_1 \cos \alpha + \dot{\mu}_{a1}\sqrt{\dot{k}_2^2 - \dot{k}_1^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (5.100)$$

5.5.3. Анализ коэффициентов Френеля

Из анализа (5.99) и (5.100) видно, что коэффициенты Френеля являются комплексными величинами, т. е. они могут быть записаны в виде

$$\dot{R}_{в,г} = R_{в,г} e^{j\beta_{в,г}} \quad \text{и} \quad \dot{r}_{в,г} = r_{в,г} e^{j\psi_{в,г}}, \quad (5.101)$$

где $R_{в,г}$ и $r_{в,г}$ – модуль коэффициентов отражения и преломления соответственно, который характеризует отношение амплитуд отраженной и преломленной волн к падающей волне;

$\beta_{в,г}$ и $\psi_{в,г}$ – аргумент коэффициентов отражения и преломления соответственно, который указывает на величину сдвига фаз между отраженной и падающей и преломленной и падающей волнами в точке отражения.

Комплексность коэффициентов Френеля означает, что при отражении (преломлении) волны имеет место *изменение фазы* колебаний на угол $\beta_{в,г}$ ($\psi_{в,г}$).

На практике наибольший интерес представляет отраженная (например, от радиолокационной цели, земли, воды и т. д.) волна. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением только коэффициентов отражения $\dot{R}_в$ и \dot{R}_r . Выясним зависимости $\dot{R}_в$ и \dot{R}_r от угла α падения.

Первый случай. Пусть первая и вторая среды идеальные ($\sigma = 0$) диэлектрики с параметрами $\epsilon_{a2} > \epsilon_{a1}$ и $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$. В этом случае выражения (5.99) и (5.100) для коэффициентов отражения преобразуются к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_в = \frac{\epsilon_{a2} \cos \alpha - \sqrt{\epsilon_{a1}} \sqrt{\epsilon_{a2} - \epsilon_{a1} \sin^2 \alpha}}{\epsilon_{a2} \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_{a1}} \sqrt{\epsilon_{a2} - \epsilon_{a1} \sin^2 \alpha}}, \\ \dot{R}_r = \frac{\sqrt{\epsilon_{a1}} \cos \alpha - \sqrt{\epsilon_{a2} - \epsilon_{a1} \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\epsilon_{a1}} \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_{a2} - \epsilon_{a1} \sin^2 \alpha}}. \end{array} \right. \quad (5.102)$$

Из анализа выражений (5.102) видно, что при угле падения $\alpha = 0$ (нормальное падение)

$$\dot{R}_в(0) = \frac{\sqrt{\epsilon_{a2}} - \sqrt{\epsilon_{a1}}}{\sqrt{\epsilon_{a2}} + \sqrt{\epsilon_{a1}}},$$

т. е. $0 < \dot{R}_в(0) < 1$ или $0 < R_в(0) < 1$, а $\beta_в = 0^\circ$;

$$\dot{R}_r(0) = \frac{\sqrt{\epsilon_{a1}} - \sqrt{\epsilon_{a2}}}{\sqrt{\epsilon_{a1}} + \sqrt{\epsilon_{a2}}},$$

т. е. $-1 < \dot{R}_r(0) < 0$ или $0 < R_r(0) < 1$, а $\beta_r = 180^\circ$.

Модули $R_v(0)$ и $R_r(0)$ коэффициентов отражения равны.

Из анализа выражений (5.102) видно, что при угле падения $\alpha = 90^\circ$

$$\dot{R}_v(90^\circ) = \dot{R}_r(90^\circ) = -1, \text{ т. е. } R_v(90^\circ) = R_r(90^\circ) = 1, \text{ а } \beta_v = \beta_r = 180^\circ.$$

На рис. 5.28 представлены графические зависимости модулей и аргументов коэффициентов отражения (рис. 5.28, а) и преломления (рис. 5.28, б) для вертикально и горизонтально поляризованной волны для случая, когда $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 9$, полученные в результате моделирования выражений (5.99) и (5.100).

Из анализа рис. 5.28 можно сделать следующие выводы:

- модули коэффициентов отражения R_v и R_r равны между собой только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$. Во всех остальных случаях $R_v < R_r$. Это означает, что *при прочих равных условиях амплитуда отраженной горизонтально поляризованной волны превосходит амплитуду отраженной вертикально поляризованной волны*. Это обстоятельство является основной причиной того, что в радиолокации чаще применяют горизонтальную поляризацию;

- модуль коэффициента отражения вертикально поляризованной волны R_v существенно зависит от угла α падения и при некотором угле падения $\alpha_{\text{Бр}}$ достигает минимального значения ($R_v = 0$). *Угол $\alpha_{\text{Бр}}$, при котором вертикально поляризованная волна не отражается ($R_v = 0$) от плоской границы раздела двух сред, а полностью переходит во вторую среду, называется углом Брюстера.*

Установим связь между $\alpha_{\text{Бр}}$ и параметрами сред, для чего в (5.91) приравняем \dot{R}_v нулю при $\alpha = \alpha_{\text{Бр}}$ и получим

$$Z_1 \cos \alpha_{\text{Бр}} = Z_2 \cos \alpha_{\text{п}}.$$

С учетом того, что

$$\cos \alpha_{\text{п}} = \frac{1}{k_2} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha_{\text{Бр}}}, \text{ а } \cos \alpha_{\text{Бр}} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\text{Бр}}},$$

получаем

$$\sin^2 \alpha_{\text{Бр}} = \frac{1 - \frac{\dot{\mu}_{a2} \dot{\epsilon}_{a1}}{\dot{\mu}_{a1} \dot{\epsilon}_{a2}}}{1 - (\dot{\epsilon}_{a1}/\dot{\epsilon}_{a2})^2}. \quad (5.103)$$

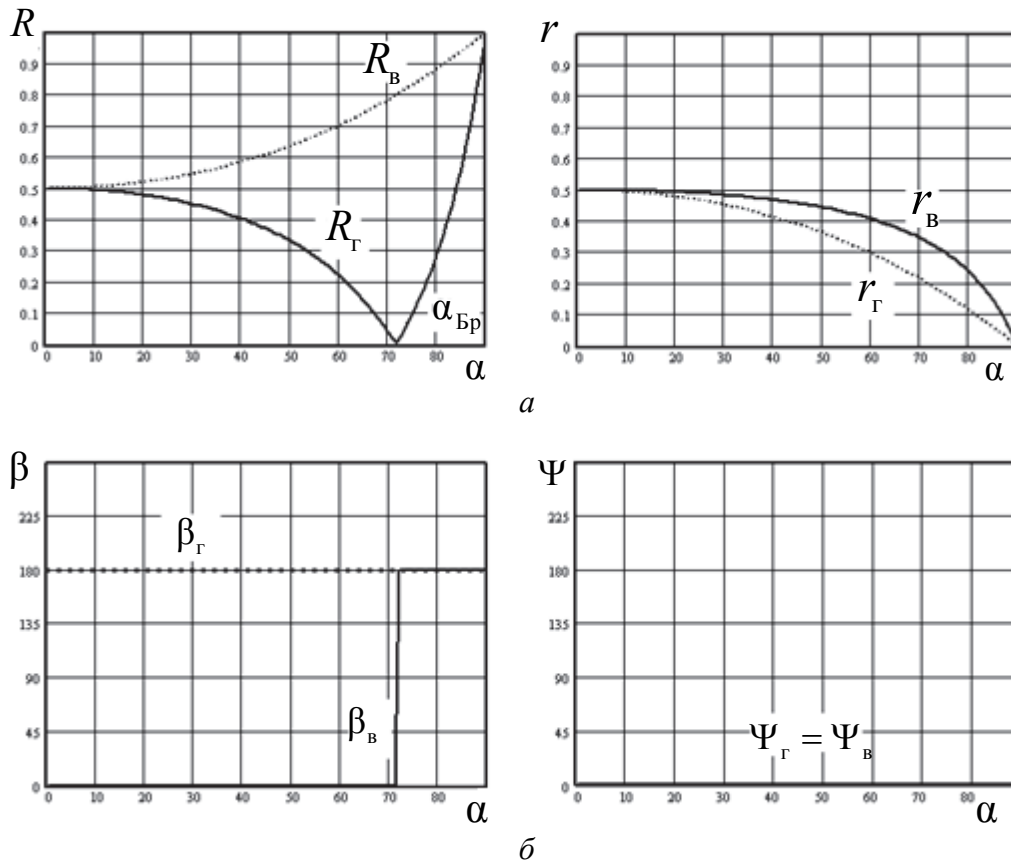


Рис. 5.28. Графические зависимости модулей и аргументов коэффициентов отражения (а) и преломления (б) для вертикально и горизонтально поляризованной волны

Выражение (5.103) определяет зависимость между углом Брюстера $\alpha_{\text{Бр}}$ и параметрами ($\dot{\mu}_a$ и $\dot{\epsilon}_a$) сред для случая вертикальной поляризации. Очевидно, что полученное равенство может выполняться только при $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$. Для случая обычных диэлектриков $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$ выражение (5.103) принимает вид

$$\sin \alpha_{\text{Бр}} = \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}_{a2}}{\dot{\epsilon}_{a2} + \dot{\epsilon}_{a1}}}$$

или, воспользовавшись известной из тригонометрии формулой преобразования $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$, получим

$$\text{tg } \alpha_{\text{Бр}} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{a2} / \dot{\epsilon}_{a1}}. \quad (5.104)$$

В общем случае (при $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ и $\mu_1 \neq \mu_2$) для существования угла Брюстера необходимо выполнение неравенств

$$0 < \frac{1 - (\mu_2 \varepsilon_1 / \mu_1 \varepsilon_2)}{1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2} < 1.$$

Свойство полного преломления вертикально поляризованной волны можно использовать для получения линейно-поляризованной волны из волны с произвольной поляризацией, в том числе и с хаотической. Если на идеальный диэлектрик направить волну, например с круговой поляризацией под углом Брюстера $\alpha_{\text{Бр}}$, то отраженная от диэлектрика волна окажется горизонтально поляризованной. Вертикально поляризованная волна в этом случае полностью пройдет в диэлектрик.

З а м е ч а н и е.

Если в (5.98) приравняем \dot{R}_r нулю при $\alpha = \alpha_{\text{Бр}}$, то получим

$$\sin^2 \alpha_{\text{Бр}} = \frac{1 - \dot{\mu}_{a1} \dot{\varepsilon}_{a2} / \dot{\mu}_{a2} \dot{\varepsilon}_{a1}}{1 - (\dot{\mu}_{a1} / \dot{\mu}_{a2})^2}. \quad (5.105)$$

Анализ выражения (5.105) показывает, что при горизонтальной поляризации также имеет место угол Брюстера $\alpha_{\text{Бр}}$, необходимым условием существования которого является условие $\mu_1 \neq \mu_2$. Если при этом $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то получается простое соотношение

$$\text{tg } \alpha_{\text{Бр}} = \sqrt{\dot{\mu}_2 / \dot{\mu}_1}. \quad (5.106)$$

В общем случае (при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и $\mu_1 \neq \mu_2$) для существования угла Брюстера при горизонтальной поляризации необходимо выполнение неравенств:

$$0 < \frac{1 - \mu_1 \varepsilon_2 / \mu_2 \varepsilon_1}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2} < 1.$$

От границы раздела двух диэлектриков $\mu_1 = \mu_2$ волна горизонтальной поляризации **отражается** при **любых** углах падения α .

- График (5.28, а) для аргументов β коэффициентов отражения показывает, что при **горизонтальной** поляризации во всем диапазоне изменения угла падения α разность фаз падающей и отраженной волн равна π . Это значит, что, исходя из определения коэффициента отражения, фаза магнитного поля при отражении меняется на π , а фаза электрического поля не изменяется. При **вертикальной** поляризации разность фаз падающей и отраженной волн при $\alpha < \alpha_{\text{Бр}}$ равна **нулю**, а при $\alpha > \alpha_{\text{Бр}}$ фазы волн отличаются на π . Причем, если падающую волну направить на границу раздела двух идеальных диэлектриков под углом Брюстера $\alpha_{\text{Бр}}$, то произойдет скачкообразное изменение фазы (фаза отраженной волны будет отличаться от фазы падающей на π).

Рассмотрим, как будет изменяться поляризация электромагнитных волн при падении на границу раздела двух сред.

Пусть на границу раздела сред падает волна с *круговой* поляризацией. Такую волну можно представить в виде суммы двух волн: горизонтально и вертикально поляризованных волн, а так как коэффициенты отражения \dot{R}_r и \dot{R}_v этих волн различны, то отраженная волна в общем случае будет *эллиптически* поляризована (амплитуды отраженных волн различны). Если же волна с круговой поляризацией падает на границу раздела сред под углом Брюстера α_{Br} , то отраженная волна (как было сказано выше) будет иметь линейную поляризацию.

При эллиптической поляризации падающей волны отраженная волна в общем случае также будет эллиптически поляризованной, но размеры эллипса поляризации при этом изменяются. Это явление зависит от свойств среды (поскольку $\dot{R}_r(\epsilon, \mu)$ и $\dot{R}_v(\epsilon, \mu)$) и используется на практике для определения характеристик отражающей поверхности, т. е. для селекции радиолокационных целей.

Второй случай. Пусть первая среда – идеальный ($\sigma = 0$) диэлектрик с параметрами ϵ_{a1} и $\mu_{a1} = \mu_0$, а вторая среда является полупроводником ($\sigma \neq 0$) с параметрами ϵ_{a2} и $\mu_{a2} = \mu_0$. Этот случай часто встречается на практике, например, граница раздела между воздухом и почвой, воздухом и водой.

На рис. 5.29 представлены графические зависимости модулей и аргументов коэффициентов отражения для вертикально и горизонтально поляризованной волны для случая, когда второй средой является сухая почва ($\epsilon_2 = 4, \mu_2 = 1, \sigma_2 = 10^{-2}$ См/м, $f = 1$ МГц), полученные в результате моделирования выражений (5.99) и (5.100).

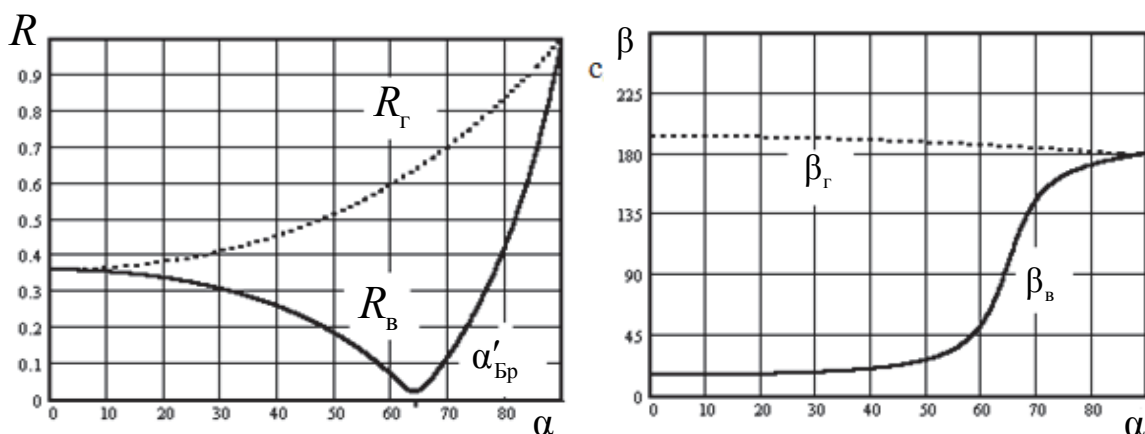


Рис. 5.29. Графические зависимости модулей и аргументов коэффициентов отражения для вертикально и горизонтально поляризованной волны для случая, когда второй средой является сухая почва

Из анализа рис. 5.29 можно сделать следующие выводы:

- коэффициент $\dot{R}_B > 0$ всегда. При некотором угле $\alpha'_{бр}$ (псевдобрюстеровский угол) падения \dot{R}_B достигает своего минимального значения;
- $\dot{R}_T > \dot{R}_B$ при всех углах α падения, а значит, ЭМВ горизонтальной поляризации меньше поглощаются подстилающей поверхностью (в нашем случае – сухой почвой);
- $\beta_T > \pi$ при всех углах падения α .

В случае падения электромагнитной волны на границу раздела сред с конечной проводимостью всегда будет иметь место фазовый сдвиг между горизонтально поляризованной и вертикально поляризованной отраженными волнами (рис. 5.29), что приводит к возникновению эллиптической поляризации отраженной волны даже при линейной поляризации падающей волны.

Третий случай. Пусть первая среда – идеальный ($\sigma = 0$) диэлектрик с параметрами ϵ_{a1} и $\mu_{a1} = \mu_0$, а вторая среда – идеальный ($\sigma = \infty$) проводник. Тогда из выражений (5.99) и (5.100) следует, что $\dot{R}_B = 1$, а $\dot{R}_T = -1$ при всех углах α падения, т. е.

$$R_B = 1, \beta_B = 0^\circ, R_T = -1, \beta_T = 180^\circ.$$

Таким образом, от идеального проводника ЭМВ полностью отражаются и распространяются вдоль границы раздела двух сред.

5.5.4. Явление полного внутреннего отражения. Преломление электромагнитных волн в оптически плотную среду

Определим условия, при которых отсутствует преломленная волна, для чего рассмотрим второй закон Снеллиуса для случая идеальных ($\sigma = 0$) диэлектрических сред:

$$\frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{\mu_{a1}\epsilon_{a1}}}{\sqrt{\mu_{a2}\epsilon_{a2}}}.$$

Если предположить, что $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$ (данное утверждение справедливо для всех сред, кроме ферромагнетиков), второй закон Снеллиуса запишется в виде

$$\frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{\epsilon_{a1}}}{\sqrt{\epsilon_{a2}}}$$

или

$$\sin \alpha_n = \sin \alpha \sqrt{\epsilon_{a1}/\epsilon_{a2}}. \quad (5.107)$$

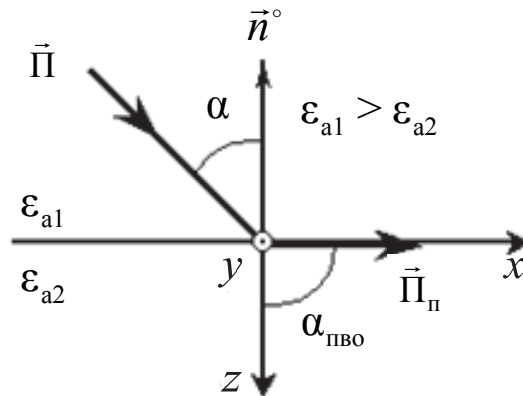


Рис. 5.30. Случай распространения ЭМВ из среды, оптически менее плотной, в среду оптически более плотную

Предположим, что $\epsilon_{a2} < \epsilon_{a1}$ (вторая среда оптически менее плотная по сравнению с первой) и ЭМВ распространяется из первой среды во вторую. Тогда $\epsilon_{a1} / \epsilon_{a2} > 1$ и из (5.107) следует, что $\alpha_{\text{п}} > \alpha$. Поэтому возможно такое значение угла α падения, при котором волна будет распространяться параллельно границе раздела сред, т. е. $\alpha_{\text{п}} = 90^\circ$ (рис. 5.30).

Наименьшее значение угла падения α , при котором угол $\alpha_{\text{п}}$ преломления равен 90° , называется **углом полного внутреннего отражения** ($\alpha_{\text{пвo}}$).

Из выражения (5.107) при $\alpha_{\text{п}} = 90^\circ$ следует, что

$$\alpha = \alpha_{\text{пвo}} = \arcsin \sqrt{\epsilon_{a2} / \epsilon_{a1}}. \quad (5.108)$$

Таким образом, для возникновения полного отражения необходимо выполнение двух условий.

Вторая среда должна быть оптически менее плотной по сравнению с первой, т. е. $\epsilon_{a2} < \epsilon_{a1}$.

Угол падения α должен быть больше или равен углу полного внутреннего отражения, т. е. $\alpha \geq \alpha_{\text{пвo}}$.

Для волны, падающей под углом $\alpha \geq \alpha_{\text{пвo}}$, преломленная электромагнитная волна существует лишь в некотором слое, примыкающем к поверхности раздела, и распространяется параллельно границе раздела сред. Такая волна называется **поверхностной**. Амплитуды векторов поля поверхностной волны экспоненциально убывают в направлении, перпендикулярном границе раздела. Волна как бы «прижимается» к первой среде, обладающей большим значением ϵ_a . *Фазовая скорость поверхностной волны вдоль границы раздела меньше фазовой скорости волны в оптически менее плотной (второй) среде.* Поэтому поверхностные волны называются **замедленными**. Поверхностные волны могут возникать и при других условиях распространения, например:

- вдоль поверхности раздела воздух и проводящая среда;
- вдоль проводника, покрытого диэлектриком;
- вдоль ребристых структур и т. д.

Явление полного внутреннего отражения широко используется в радиолокации для создания замедляющих систем, а в технике СВЧ - для создания линий передач в виде диэлектрических волноводов, световодов.

Предположим теперь, что ЭМВ распространяется в оптически более плотную среду, т. е. $\epsilon_{a2} > \epsilon_{a1}$, $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$. Тогда $\epsilon_{a1} / \epsilon_{a2} < 1$ и из (5.107) следует, что $\alpha_{\text{п}} < \alpha$.

Поскольку угол падения α меняется в пределах от 0 до $\pi/2$, то преломленная волна будет существовать при любом угле падения.

Если $\epsilon_{a2} \gg \epsilon_{a1}$, то $\alpha_{\text{п}} \ll \alpha$, т. е. $\alpha_{\text{п}} \approx 0$, и при любом угле падения направление распространения преломленной волны близко к нормали к границе раздела сред (рис. 5.31).

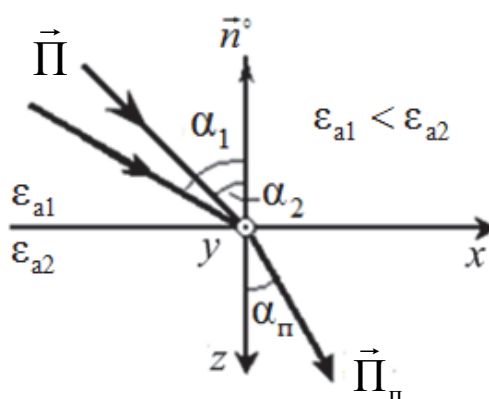


Рис. 5.31. Случай когда ЭМВ распространяется в оптически более плотную среду

Такое явление будет наблюдаться при распространении электромагнитных волн, например из воздуха в морскую воду, и используется на практике при локации подводных объектов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебнике дано определение ЭМП, рассмотрены источники электромагнитного поля и основные величины, характеризующие как источники ЭМП, так и само поле.

Приведена классификация сред, в которых существует ЭМП, в основу которой положено исследование зависимости параметров сред от координат, времени и напряженности поля.

Рассмотрен математический аппарат, определяющий взаимосвязь величин, характеризующих ЭМП, с величинами, описывающими источники поля и среду, а также общие свойства и методы решения уравнений электромагнитного поля.

В учебнике приведено описание баланса энергии поля, из которого вытекает возможность излучения ЭМП, установлены связи между величинами, характеризующими ЭМП, и энергетическими характеристиками электромагнитных процессов.

Рассмотрены принципы излучения ЭМВ и свойства и характеристики простейших излучателей: элементарный электрический вибратор, элементарный магнитный вибратор, элемент Гюйгенса, элементарная щель.

Рассмотрены физические процессы при распространении плоских электромагнитных волн и их свойства в однородных изотропных и анизотропных средах, а также законы отражения и преломления плоских ЭМВ на плоской границе раздела двух однородных сред.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 2000.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика / под ред. Ю.В. Пименова: учеб. пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2000.
3. Баскаков С.И. Электродинамика и распространение радиоволн: учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.
4. Специальные разделы физики. Электродинамика. Часть 1. Теория электромагнитного поля: учеб. пособие / под ред. В.А. Борисенка. – Нижний Новгород ВЗРКУ ПВО, 1998.
5. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ: учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1990.
6. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989.
7. Петушинский Б.Б. Электродинамика и распространение радиоволн. Ч. 1. Теория электромагнитного поля: конспект лекций. – Даугавпилс: издание ВВАИУ им. Я. Фабрициуса, 1984.
8. Электродинамика и техника СВЧ. Ч. 1. Теория электромагнитного поля: учебник / под ред. Б.И. Курилина. – М.: Воениздат, 1983.
9. Теория электромагнитного поля и техника сверхвысоких частот: учебник для вузов / под ред. Б.И. Штительмана. – Харьков: ВИРТА им. Л.А. Говорова, 1974.
10. Корбанский И.Н. Основы электродинамики высоких частот. – М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1953.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Контрольные вопросы и задачи для самоконтроля

Глава 2. Основные уравнения электромагнитного поля

Вопрос 1. Анализ уравнений электромагнитного поля в интегральной и дифференциальной форме.

Задача 1. Записать второе уравнение электродинамики в декартовой системе координат.

Решение

1. Запишем второе уравнение электродинамики в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

2. Запишем левую и правую части равенства через проекции декартовой системы координат

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}^\circ & \vec{y}^\circ & \vec{z}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right);$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{x}^\circ \frac{\partial B_x}{\partial t} + \vec{y}^\circ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \vec{z}^\circ \frac{\partial B_z}{\partial t};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{cases}$$

Задача 2. Задано электромагнитное поле с неизменным направлением вектора \vec{E} . Показать, что векторы \vec{E} и \vec{B} взаимно перпендикулярны.

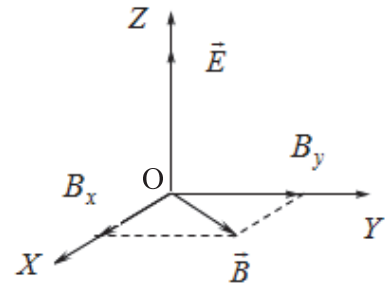
Решение

1. Совместим в декартовой системе координат вектор \vec{E} с осью OZ. В данном случае проекции вектора $E_x = E_y = 0$.

2. Используя систему уравнений предыдущей задачи, определяем проекцию вектора \vec{B} на ось OZ

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \Rightarrow B_z = \text{const.}$$

Однако, согласно второго уравнения электродинамики, вектор \vec{B} изменяется во времени, а значит и его проекции в главных плоскостях тоже должны изменяться в пространстве. Следовательно, полученное ранее выражение справедливо в случае, когда проекция вектора \vec{B} на ось OZ равна 0, т. е. $B_z = \text{const} = 0$.



3. Вектор \vec{B} имеет проекции B_x и B_y , т. е. лежит в плоскости XOY . Поэтому $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Формальный метод

$$\text{rot } \vec{E} = [\nabla, \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

где \vec{B} есть векторное произведение $[\nabla, \vec{E}]$, следовательно, $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Вопрос 2. Расчет векторов электромагнитного поля.

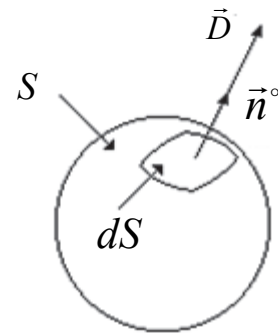
Задача 3. Рассчитать вектора \vec{D} и \vec{E} для точечного заряда.

Решение

Из третьего уравнения электродинамики и уравнения среды определяем указанные величины:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q,$$

где S – площадь поверхности точечного заряда;
 q – величина точечного заряда.



Перейдем от векторных к скалярным величинам:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \oint_S D \vec{n}^0 \cdot d\vec{s} \vec{n}^0 = \oint_S D ds \cdot \vec{n}^0 \vec{n}^0 = \oint_S D ds \cdot \cos(0) = \oint_S D ds;$$

$$\oint_S D ds = DS = D4\pi r^2 = q \Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{n}^0,$$

где r – радиус точечного заряда.

Согласно материальному уравнению $D = \varepsilon_a E$,

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2} \vec{n}^\circ.$$

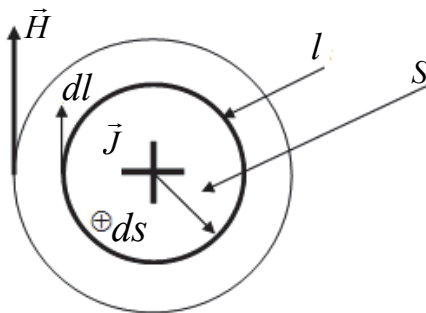
Задача 4. Определить величину напряженности магнитного поля H внутри и вне проводника, если радиус проводника равен a и по нему протекает постоянный ток $i_{\text{полн}}$. Построить график зависимости $H = f(r)$.

Решение

1. Рассчитаем величину напряженности магнитного поля H внутри проводника, для чего воспользуемся первым уравнением электродинамики

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \int_S \vec{J} \vec{ds} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \vec{ds} = \vec{i}_{\text{полн}}.$$

Поскольку по проводнику протекает постоянный ток, то второе слагаемое в первом уравнении равно 0, т. е.



$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \vec{ds} = 0 \Rightarrow$$

тогда первое уравнение Максвелла для случая постоянного тока имеет вид

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \int_S \vec{J} \vec{ds}.$$

Перейдем от векторных величин к скалярным. Поскольку $\vec{H} \parallel \vec{dl}$ и $\vec{J} \parallel ds$, то

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \int_S \vec{J} \vec{ds} \Rightarrow \oint_l H dl = \int_S J ds.$$

Решим первое уравнение Максвелла для случая постоянного тока в скалярных величинах:

$$\oint_l H dl = \int_S J ds \Rightarrow 2\pi r \cdot H = \pi r^2 \cdot J.$$

откуда $H = rJ / 2$.

Известно, что в случае для постоянного тока

$$\vec{i}_{\text{полн}} = \vec{i}_{\text{пр}} = \int_S \vec{J} \vec{ds} \Rightarrow i_{\text{полн}} = i_{\text{пр}} = \int_S J ds = \pi a^2 J,$$

отсюда $J = i_{\text{полн}} / \pi a^2$.

Следовательно, величина напряженности магнитного поля H внутри проводника $H = \frac{r \cdot i_{\text{полн}}}{2\pi a^2}$.

2. Рассчитаем величину напряженности магнитного поля H вне проводника, для чего воспользуемся первым уравнением электродинамики:

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \int_S \vec{J} \vec{ds} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \vec{ds} = \vec{i}_{\text{полн}}.$$

Поскольку ток постоянный, то $\frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \vec{ds} = 0$,

вне проводника $\vec{J} = 0$, тогда первое уравнение электродинамики примет вид

$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \vec{i}_{\text{полн}}.$$

Перейдем от векторных величин к скалярным. Поскольку $\vec{H} \parallel \vec{dl}$, то

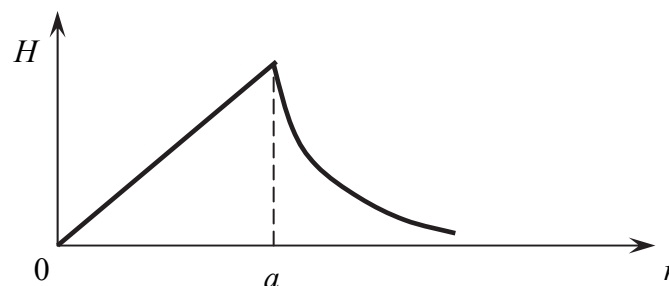
$$\oint_l \vec{H} \vec{dl} = \vec{i}_{\text{полн}} \Rightarrow \oint_l H dl = i_{\text{полн}}.$$

Решим первое уравнение Максвелла для случая постоянного тока в скалярных величинах:

$$\oint_l H dl = 2\pi r \cdot H = i_{\text{полн}}.$$

Тогда величина напряженности магнитного поля H вне проводника определяется $H = i_{\text{полн}} / 2\pi r$.

График зависимости $H = f(r)$ представлен на рисунке ниже



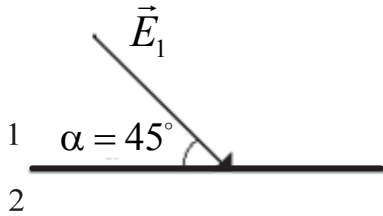
Выводы:

1. Векторы электромагнитного поля \vec{E} и \vec{B} взаимно перпендикулярны.
2. Уравнения электродинамики позволяют производить расчет векторов как электромагнитного поля, так и векторов отдельно электрического и магнитного поля.

Глава 3. Энергетические соотношения в электромагнитном поле

Вопрос 1. Расчет и анализ векторов ЭМП на границе раздела двух сред.

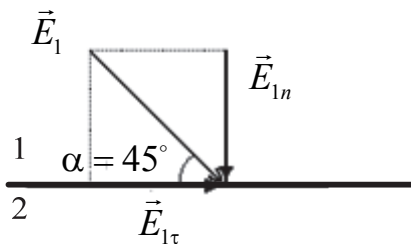
Задача 1. Напряженность электрического поля в первой среде у границы раздела сред $\vec{E}_1 = 10$ В/м. Вектор образует с границей раздела угол $\alpha = 45^\circ$. Диэлектрическая проницаемость сред $\epsilon_{a1} = \epsilon_0$, $\epsilon_{a2} = 3\epsilon_0$. Плотность поверхностного заряда $\rho_s = 2 \cdot 10^{-11}$ Кл/м². Рассчитать и построить вектор \vec{E}_2 , \vec{D}_2 и \vec{D}_1 у границы раздела.



Решение

1. Представим вектор \vec{E}_1 как сумму нормальной \vec{E}_{1n} и тангенциальной $\vec{E}_{1\tau}$ составляющих.

2. Определим длины векторов \vec{E}_{1n} и $\vec{E}_{1\tau}$:



$$E_{1n} = E_{1\tau} = E_1 \cdot \sin \alpha = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ В/м.}$$

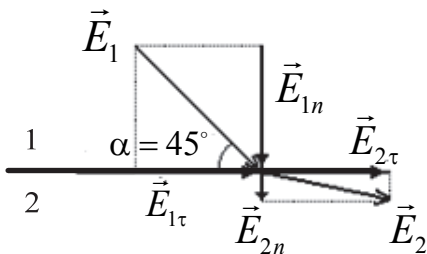
3. Используя граничные условия для тангенциальных составляющих векторов электрического поля $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, определим длину тангенциальной $E_{2\tau}$ составляющей электрического поля во второй среде:

$$E_{2\tau} = E_{1\tau} = 5\sqrt{2} \text{ В/м.}$$

4. Используя граничные условия для нормальных составляющих векторов электрического поля $D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$, определим длину нормальной \vec{E}_{2n} составляющей электрического поля согласно рисунка во второй среде:

$$\epsilon_{a1} E_{1n} - \epsilon_{a2} E_{2n} = \rho_s \Rightarrow$$

$$E_{2n} = \frac{\epsilon_{a1} E_{1n} - \rho_s}{\epsilon_{a2}} = \frac{\epsilon_0 \cdot 5\sqrt{2} - 2 \cdot 10^{-11}}{3\epsilon_0} = 1,6 \text{ В/м.}$$



5. Вектор \vec{E}_2 является векторной суммой его нормальной \vec{E}_{2n} и тангенциальной $\vec{E}_{2\tau}$ составляющих. Определим длину вектора \vec{E}_2 :

$$E_2 = \sqrt{E_{2\tau}^2 + E_{2n}^2} = 7,25 \text{ В/м.}$$

6. Определим длину вектора \vec{D}_1

$$D_1 = \varepsilon_{a1} \cdot E_1 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-8} \text{ Кл/м}^2.$$

7. Определим длину вектора \vec{D}_2

$$D_2 = \varepsilon_{a2} \cdot E_2 = 19,2 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2.$$

При переходе через границу раздела вектора \vec{E} и \vec{D} претерпевают скачок, т. е. изменяются их величина и направление.

Задача 2. Изобразить, как направлены вектора \vec{E} и \vec{H} внутри и вне проводника, по которому протекает постоянный ток i .

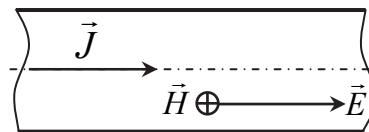
Решение

1. Рассмотрим простейшую электрическую цепь, состоящую из источника ЭДС, проводов и нагрузки.



2. Рассмотрим, как направлены вектора \vec{E} и \vec{H} в некоторой точке, расположенной внутри проводника. Согласно закону Ома в дифференциальной форме $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ вектор \vec{E} совпадает по направлению с вектором плотности тока \vec{J} . Направление вектора \vec{H} определяется согласно закона полного тока:

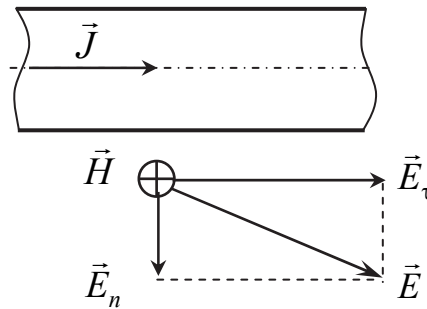
$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} = \vec{J}_{\text{полн}}.$$



3. Рассмотрим, как направлены вектора \vec{E} и \vec{H} в точке M , расположенной вне поверхности проводника. Направление вектора \vec{H} определяется согласно закону полного тока и совпадает с направлением вектора внутри проводника. Вектор \vec{E} в точке будет иметь две составляющие:

\vec{E}_τ – тангенциальную, обусловленную граничными условиями $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, и пропорциональную $\vec{E}_\tau \approx \vec{J}/\sigma$;

\vec{E}_n – нормальную, обусловленную разностью потенциалов между проводами.



Таким образом, направление вектора \vec{E} будет определяться векторной суммой его составляющих:

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_\tau.$$

Вопрос 2. Анализ уравнения баланса энергии ЭМП.

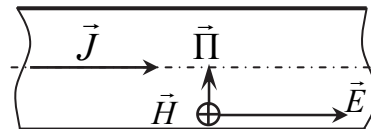
Задача 3. Для условия задачи 2 показать:

- а) направление вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ внутри проводника;
- б) направление вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}$ вне проводника.

Решение

1. Записываем выражение для расчета вектора: $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]$.

2. Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ во всех точках внутри проводника перпендикулярен оси провода и направлен от периферии к центру. Это свидетельствует о том, что внутри провода поток энергии направлен от поверхности провода к его оси. В направлении, параллельном оси провода (от источника к нагрузке), движения энергии внутри провода не происходит.



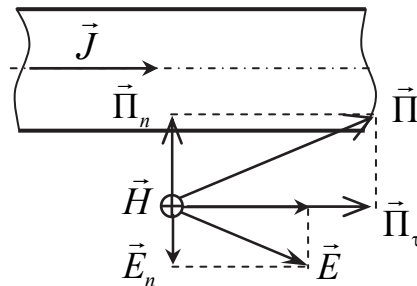
3. Поскольку в некоторой точке, расположенной вне поверхности проводника, вектор \vec{E} в точке имеет две составляющие: \vec{E}_τ – тангенциальную и \vec{E}_n – нормальную, поэтому вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ будет определяться по выражению

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = [\vec{E}_\tau, \vec{H}] + [\vec{E}_n, \vec{H}] = \vec{\Pi}_n + \vec{\Pi}_\tau,$$

т. е. вектор Пойнтинга в любой точке пространства вокруг проводов имеет две составляющие.

Тангенциальная составляющая вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}_\tau$, направленная вдоль проводов от источника к нагрузке, свидетельствует о том, что элек-

тромагнитная энергия от источника к нагрузке передается в пространстве вокруг проводов.



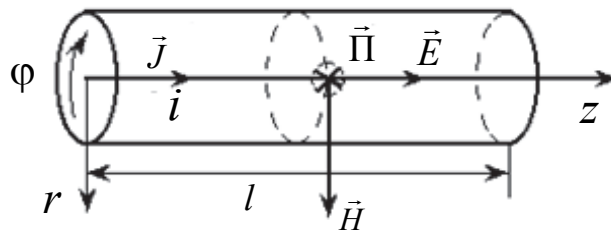
Наличие нормальной составляющей вектора Пойнтинга $\vec{\Pi}_n$, направленной перпендикулярно поверхности проводника, свидетельствует о том, что часть электромагнитной энергии уходит в проводник и там рассеивается на тепло.

Задача 4. Получить выражение для расчета вектора Пойнтинга в произвольной точке на поверхности проводника, радиус которого равен a . По проводнику протекает ток i . Определить поток энергии на участке проводника длиной l .

Решение

1. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) .
2. Определим направление и величину вектора \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{z}^0 \frac{J}{\sigma} = \vec{z}^0 \frac{i}{S_{\text{сеч}} \sigma} = \vec{z}^0 \frac{i}{\pi a^2 \sigma}.$$



Величина вектора \vec{H} определяется согласно закону полного тока в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J} d\vec{s} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} = \int_S \vec{J} d\vec{s}.$$

Перейдем от интегральной форме к скалярной

$$\oint_L H dl \vec{\varphi}^0 \vec{\varphi}^0 = \int_S J ds \vec{z}^0 \vec{z}^0 \Rightarrow H \oint_L dl = J \int_S ds \Rightarrow HL = JS \Rightarrow$$

$$H = \frac{JS}{L} = \frac{iS}{2\pi aS} = \frac{i}{2\pi a}.$$

Направление вектора \vec{H} определяется по формуле $\vec{H} = \vec{\varphi}^\circ \frac{i}{2\pi a}$.

3. Определим вектор Пойнтинга:

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \left[\vec{z}^\circ \frac{i}{\pi a^2 \sigma}, \vec{\varphi}^\circ \frac{i}{2\pi a} \right] = -\vec{r}^\circ \cdot \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}.$$

4. Определим поток энергии на участке проводника длиной l :

$$\oint_{S_{\text{бок}}} \vec{\Pi} d\vec{s} = \oint_{S_{\text{бок}}} \frac{\vec{r}^\circ i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \vec{r}^\circ ds = \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \oint_{S_{\text{бок}}} ds = \frac{i^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \cdot 2\pi a l = i^2 \cdot \frac{l}{\pi a^2 \sigma} = i^2 R,$$

где $R = \frac{l}{\pi a^2 \sigma}$ – сопротивление участка проводника.

Выводы:

1. Электромагнитная энергия в цепи передается в пространстве между проводами. При этом провода выполняют роль направляющей системы для передачи электромагнитной энергии от источника потребителю.

Выражение «передача электроэнергии по проводам» не является строгим, более точно – «передача электроэнергии с помощью проводов».

2. КПД линии передачи электромагнитной энергии тем выше, чем больше отношение $\frac{\vec{\Pi}_z}{\vec{\Pi}_n} = \frac{\vec{E}_n}{\vec{E}_\tau}$.

3. На практике стремятся передавать электромагнитную энергию при высокой разности потенциалов между проводами и при малом токе. КПД линии передачи зависит от проводимости материала проводов. КПД растет с увеличением проводимости.

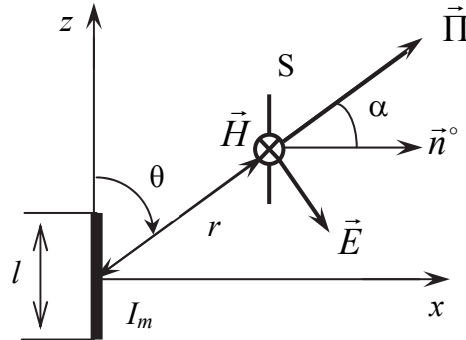
Глава 4. Элементарные источники электромагнитных волн

Вопрос 1. Расчет составляющих поля ЭЭВ в дальней зоне.

Задача 1. Определить длину волны излучаемых элементарным вибратором колебаний в свободном пространстве, если известны: длина вибратора $l = 20$ см, амплитуда питающего тока $I_m = 20$ А, среднее значение вектора Пойнтинга $\Pi_{\text{ср}} = 5$ мкВт/м² в точке с координатами $r = 10^3$ м, $\theta = 30^\circ$, $\Psi = 0^\circ$. Найти амплитуду векторов \vec{E}_θ и \vec{H}_Ψ в указанной точке и среднюю мощность, переносимую волной через площадку $S = 4$ м², нормаль к которой составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с лучом волны.

Р е ш е н и е

1. Изобразим рисунок с указанием исходных данных и покажем ориентацию векторов \vec{E} , \vec{H} , $\vec{\Pi}$ в рассматриваемой точке.



2. Из выражения для средних значений вектора Пойнтинга определяем амплитуду электрического поля:

$$\Pi_{\text{cp}} = \frac{1}{2} E_{m\theta} \cdot H_{m\psi}.$$

Амплитуды векторов поля в дальней зоне $E_{m\theta}$ и $H_{m\psi}$ связаны между собой через волновое сопротивление среды:

$$H_{m\psi} = \frac{E_{m\theta}}{W_0},$$

где $W_0 = 120\pi$ – волновое сопротивление свободного пространства.

$$\Pi_{\text{cp}} = \frac{E_{m\theta}^2}{2W_0} = \frac{E_{m\theta}^2}{240\pi} \Rightarrow$$

$$E_{m\theta} = \sqrt{240\pi \Pi_{\text{cp}}} = \sqrt{240 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 6,14 \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

3. Вычисляем амплитуду магнитного поля:

$$H_{m\psi} = \frac{E_{m\theta}}{W_0} = \frac{6,14 \cdot 10^{-2}}{120\pi} = 1,63 \cdot 10^{-4} \text{ А/м.}$$

4. Длину волны излучаемых колебаний определяем из выражения

$$E_{m\theta} = W_0 \frac{I_m l}{2\lambda r} |\sin \theta| \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{W_0 I_m l \cdot |\sin \theta|}{2r E_{m\theta}} = \frac{120\pi \cdot 20 \cdot 0,2 \cdot 0,5}{2 \cdot 6,14 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3} = 6,14 \text{ м.}$$

(условие $l \ll \lambda$ выполняется ($0,2 \ll 6,14$) – выполняется, следовательно – вибратор элементарный).

5. Находим среднюю мощность, переносимую волной через площадку

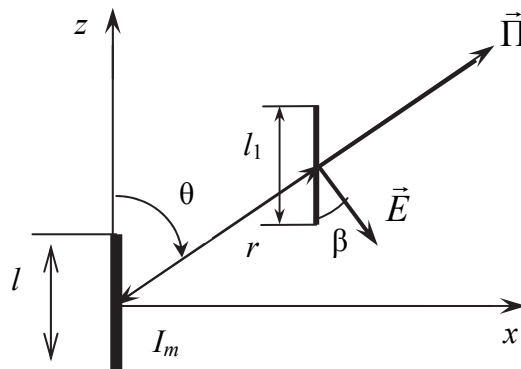
$$P_{\Sigma_{cp}} = \oint_S \vec{\Pi}_{cp} \vec{ds} = \oint_S \Pi_{cp} ds \cdot \cos \alpha = \Pi_{cp} \cos \alpha \oint_S ds ;$$

$$P_{\Sigma_{cp}} = \Pi_{cp} \cdot S \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 0,707 = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ Вт.}$$

Вывод. Величина средней мощности, переносимой волной через площадку S зависит от величины этой площадки и ее ориентации относительно луча.

Задача 2. Условие задачи 1. В некоторой точке пространства помещен приемный вибратор длиной $l_1 = 20$ см. Угол между осью вибратора и вектором $\vec{E}_{m\theta}$ равен β . Определить амплитуду ЭДС, наводимой в приемном вибраторе при следующих значениях угла β :

- $\beta = 0^\circ$;
- $\beta = 45^\circ$
- $\beta = 90^\circ$.



Решение

Величину ЭДС, наводимую в приемном вибраторе, определим из следующего выражения:

$$e_m = \int_{l_1} \vec{E}_{m\theta} \vec{dl} .$$

Перейдем от векторов под знаком интеграла к скалярам:

$$e_m = \int_{l_1} E_{m\theta} dl \cos \beta = E_{m\theta} \cos \beta \int_{l_1} dl = E_{m\theta} l_1 \cos \beta .$$

Подставляя значения угла β в полученное выражение, получаем

$$e_m = E_{m\theta} l_1 \cos \beta = 6,14 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2 \cdot 1 = 1,23 \cdot 10^{-2} \text{ В},$$

$$e_m = E_{m\theta} l_1 \cos \beta = 6,14 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2 \cdot 0,707 = 8,7 \cdot 10^{-3} \text{ В},$$

$$e_m = E_{m\theta} l_1 \cos \beta = 6,14 \cdot 10^{-2} \cdot 0,2 \cdot 0 = 0 \text{ В}.$$

Вывод. Величина ЭДС, наводимой в приемном вибраторе длиной l_1 , зависит от величины этого вибратора и его ориентации относительно вектора $\vec{E}_{m\theta}$ напряженности электрического поля.

Вопрос 2. Расчет характеристик излучения ЭЭВ.

Задача 3. Элементарный вибратор длиной $l = 0,5$ м на частоте $f = 1$ МГц излучает мощность $P_\Sigma = 10$ Вт.

Найти:

- сопротивление R_Σ излучения вибратора и амплитуду возбуждаемого тока I_m ;
- мощность $P_{\Sigma 1}$, которую будет излучать вибратор, если, сохранив неизменной амплитуду тока I_m , понизить его частоту до величины $f_1 = 500$ Гц;
- амплитуду тока I_{m1} на частоте f_1 , при которой вибратор излучает мощность 10 Вт;
- сопротивление $R_{\Sigma 1}$ вибратора на частоте f_1 .

Р е ш е н и е

1. Сопротивление излучения R_Σ определяем из выражения:

$$P_\Sigma = 80\pi^2 I_{\text{эф}}^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

$$\text{Поскольку } P = UI = I^2 R, \text{ то } R_\Sigma = \frac{P_\Sigma}{I_{\text{эф}}^2} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2,$$

где $\lambda = c/f$ – длина волны в свободном пространстве.

Подставляя значение λ , получаем

$$R_\Sigma = 80\pi^2 \left(\frac{l \cdot f}{c}\right)^2 = 80 \cdot (3,14)^2 \left(\frac{0,5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8}\right)^2 = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}.$$

2. Известно, что $I_{\text{эф}} = I_m / \sqrt{2}$, следовательно, амплитуду возбуждающего тока I_m определим из выражения

$$R_\Sigma = 80\pi^2 I_{\text{эф}}^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 40\pi^2 (I_m)^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow$$

$$I_m = \frac{\lambda}{\pi l} \sqrt{\frac{P_\Sigma}{40}} = \frac{300}{3,14 \cdot 0,5} \sqrt{\frac{10}{40}} = 95,5 \text{ А}$$

или $I_m = \sqrt{\frac{2P_\Sigma}{R_\Sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{2,2 \cdot 10^{-3}}} = 95,5 \text{ А}.$

3. Мощность $P_{\Sigma 1}$ на частоте $f = 500$ Гц находим из выражения:

$$\begin{aligned} P_{\Sigma 1} &= 40\pi^2 (I_m)^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda_1}\right)^2 = 40\pi^2 (I_m)^2 \left(\frac{l \cdot f_1}{c}\right)^2 = \\ &= 40 \cdot (3,14 \cdot 95,5)^2 \left(\frac{0,5 \cdot 500}{3 \cdot 10^8}\right)^2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Вт.} \end{aligned}$$

4. Амплитуду тока на частоте f_1 , когда вибратор излучает мощность 10 Вт, получаем из выражения:

$$\begin{aligned} R_\Sigma &= 40\pi^2 (I_{m1})^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda_1}\right)^2 \Rightarrow \\ I_{m1} &= \frac{\lambda_1}{\pi \cdot l} \sqrt{\frac{P_\Sigma}{40}} = \frac{c}{\pi f_1 l} \sqrt{\frac{P_\Sigma}{40}} = \frac{3 \cdot 10^8}{3,14 \cdot 0,5 \cdot 500} \sqrt{\frac{10}{40}} = 191\,082,8 \text{ А.} \end{aligned}$$

5. Сопротивление $R_{\Sigma 1}$ излучения вибратора на частоте f_1 определяем из выражения

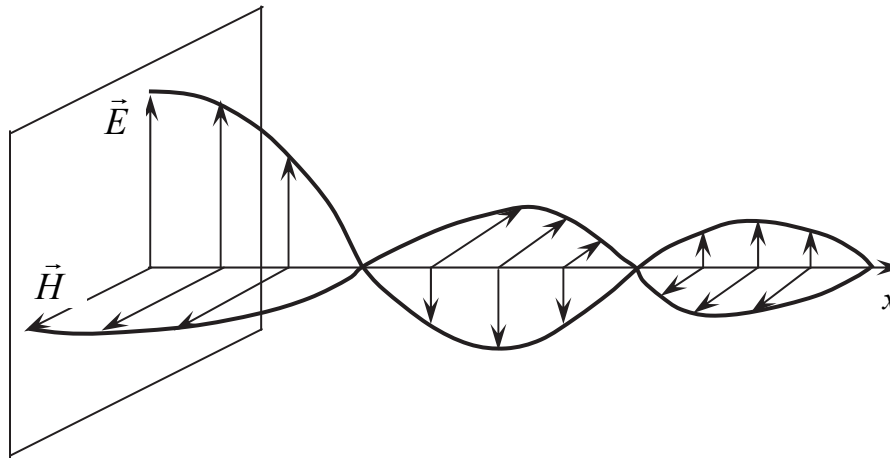
$$R_{\Sigma 1} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda_1}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l f_1}{c}\right)^2 = 80 \cdot (3,14)^2 \left(\frac{0,5 \cdot 500}{3 \cdot 10^8}\right)^2 = 5,47 \cdot 10^{-10} \text{ Ом.}$$

Вывод. Излучаемая вибратором мощность, а также сопротивление излучения вибратора зависят от частоты тока питающих колебаний (при $l = \text{const}$); чем выше частота, тем больше P_Σ и R_Σ .

Задача 4 (резерв). Элементарный вибратор из условия предыдущей задачи излучает на частоте $f = 1$ МГц. Определить в направлении $\theta = 90^\circ$ амплитуды напряженности электрического и магнитного полей в точке P , находящейся на расстоянии 10 км от вибратора.

Определить ЭДС, наводимую в приемном вибраторе длиной $l_1 = 10$ м, расположенном в точке P параллельно излучающему вибратору. Нарисовать распределение напряженности электрического и магнитного полей вдоль направления распространения в фиксированный момент времени.

Решение



1. Точка P расположена в дальней точке вибратора, так как

$$kr \gg 1; \frac{2\pi}{\lambda} r \gg 1; r \gg \frac{\lambda}{2\pi} \left(10\,000 \gg \frac{300}{2\pi} \right).$$

2. В точке P имеются только составляющие E_θ и H_ψ , поскольку это дальняя зона.

$$E_{m\theta} = W_0 H_{m\psi} = W_0 \frac{I_m l}{2\lambda r} |\sin \theta| = 377 \frac{95,4 \cdot 0,5}{2 \cdot 300 \cdot 10 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ В/м};$$

$$H_{m\psi} = \frac{E_{m\theta}}{W_0} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{377} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ А/м}.$$

3. ЭДС, наводимая в приемном вибраторе,

$$e_m = \int_{l_1} \vec{E}_{m\theta} \cdot \vec{dl} = E_{m\theta} l_1 = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ В/м}.$$

4. Мгновенное значение напряженности электрического поля

$$E(r, \theta, t) = W_0 \frac{I_m l}{2\lambda r} \sin \theta \cos \left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2} + \varphi \right).$$

При $t = \text{const}$ величина E вдоль направления распространения изменяется по косинусоидальному закону. Амплитуда поля убывает с расстоянием по закону $1/r$, колебания E и H находятся в фазе.

Задача 5. В экваториальной плоскости на расстоянии $r = 10$ км от элементарного вибратора амплитуда напряженности магнитного поля $H_m = 10^{-4}$ А/м. Какова мощность излучения?

Р е ш е н и е

$$P_{\Sigma} = 40\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_m^2;$$

$$H_m = \frac{I_m l}{2\lambda r} |\sin \theta| \Rightarrow I_m = \frac{2\lambda r H_m}{l};$$

$$P_{\Sigma} = 40\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} \frac{4\lambda^2 r^2 H_m^2}{l^2} = 160\pi^2 r^2 H_m^2 =$$

$$= 160 (3,14)^2 \cdot (10^4)^2 \cdot (10^{-4})^2 = 1\,579 \text{ Вт.}$$

Для расчета P_{Σ} можно также воспользоваться формулой

$$P_{\Sigma} = \oint_S \vec{P} \vec{d}s = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{H_m^2 W_0}{2} r^2 \sin^3 \theta \, d\theta d\psi = \frac{1}{2} H_m^2 W_0 r^2 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta =$$

$$= H_m^2 r^2 160\pi^2 = 1\,579 \text{ Вт.}$$

Глава 5. Распространение электромагнитных волн в различных средах

Вопрос 1. Определение вида поляризации плоских ЭМВ.

Задача 1. Две линейно поляризованные ЭМВ с одинаковой частотой распространяются в диэлектрике. Их плоскости поляризации ортогональны, а начальные фазы отличаются на угол $\Delta\varphi = -\pi/4$. Амплитуды векторов электрического поля равны между собой и составляют в рассматриваемой точке пространства 10 В/м.

Записать выражение для мгновенных значений результирующего вектора \vec{E}_p и рассчитать его в плоскости фронта при $z = 0$ для моментов времени $t = n \cdot T/8$, где $n = 0, 1, 2, \dots, 7$. Построить график зависимости $E_p(t)$ в декартовой системе координат. Установить вид поляризации.

Р е ш е н и е

1. Мгновенное значение результирующего вектора \vec{E}_p запишем в следующем виде:

$$\vec{E}_p = \vec{x}^\circ E_x + \vec{y}^\circ E_y = \vec{x}^\circ E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}^\circ E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2).$$

Поскольку $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/4$, то предположим, что $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = -\pi/4$. При $z = 0$ имеем

$$\vec{E}_p = \vec{x}^\circ E_{mx} \cos \omega t + \vec{y}^\circ E_{my} \cos(\omega t - \pi/4).$$

2. Преобразуем временной множитель к следующему виду:

$$\omega t = 2\pi / T \cdot n \cdot T/8 = n \cdot \pi/4.$$

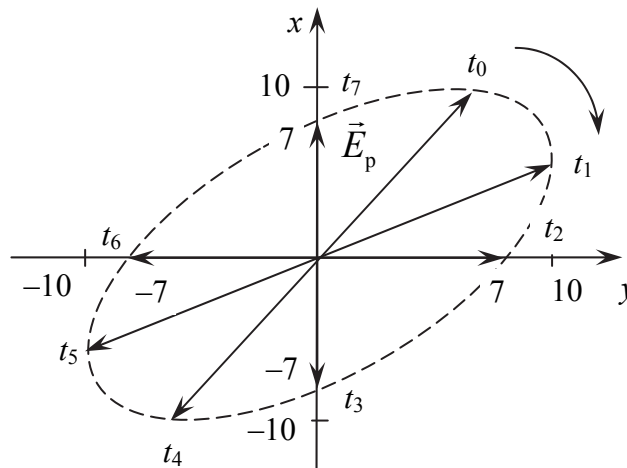
и запишем мгновенное значение векторов \vec{E}_x и \vec{E}_y :

$$E_x = E_{mx} \cos(n \cdot \pi/4) \text{ и } E_y = E_{my} \cos((n-1) \cdot \pi/4).$$

Подставляем значения $n = 0, 1, 2, \dots, 7$, получаем значения E_x, E_y в каждый момент времени:

t	0	$T/8$	$T/4$	$3T/8$	$T/2$	$5T/8$	$3T/4$	$7T/8$
n	0	1	2	3	4	5	6	7
E_x	10	7,07	0	-7,07	-10	-7,07	0	7,07
E_y	7,07	10	7,07	0	-7,07	-10	-7,07	0

Используя полученные значения, построим вектора \vec{E}_x и \vec{E}_y в каждый момент времени, а для построения результирующего вектора \vec{E}_p применим правило параллелограмма.



Вывод. Суперпозицией двух линейно поляризованных ЭМВ, плоскости поляризации которых ортогональны, а начальные фазы отличаются на угол $-\pi/4$, с одинаковой частотой и амплитудой является эллиптически поляризованная ЭМВ правого вращения.

Вопрос 2. Классификация сред по проводимости.

Задача 2. Определить характер двух сред по их электропроводимости:

1. сухой почвы ($\sigma = 10^{-2}$ См/м; $\varepsilon = 4$);
2. морской воды ($\sigma = 3$ См/м; $\varepsilon = 80$), на частотах

$$f_1 = 1 \text{ МГц}; f_2 = 100 \text{ МГц}; f_3 = 3 \text{ 000 МГц}.$$

Решение

1. Классификацию сред по их электропроводимости осуществляется по следующему критерию:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{J_{\text{пр}}}{J_{\text{см}}} = \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon_a} = \frac{\sigma}{2\pi \cdot f \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{f} \left\{ \begin{array}{l} \ll 1 - \text{диэлектрик;} \\ \gg 1 - \text{проводник;} \\ \approx 1 - \text{полупроводник.} \end{array} \right.$$

2. Рассчитаем значения тангенса угла потерь $\operatorname{tg} \delta$ для различных частот и сделаем выводы. Результаты расчета сведем в таблицу.

$\operatorname{tg} \delta$	Частоты		
	$f_1 = 1 \text{ МГц}$	$f_2 = 100 \text{ МГц}$	$f_3 = 3\,000 \text{ МГц}$
Сухая почва			
$\frac{\sigma}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} = 4,5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$	45 Проводник	0,45 Полупроводник	0,015 Диэлектрик
Морская вода			
$\frac{\sigma}{2\pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} = 675 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$	675 Проводник	6,75 Ближе к проводнику	0,225 Ближе к диэлектрику

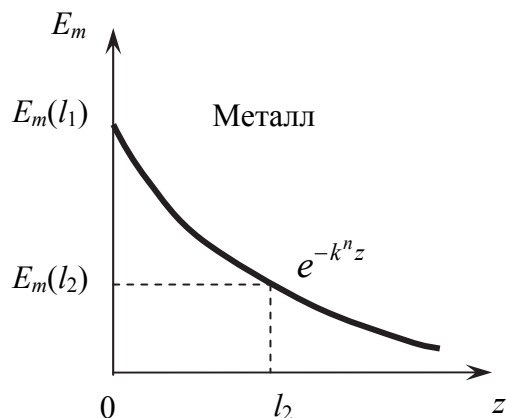
Вывод. При увеличении частоты среда стремится к диэлектрику.

Вопрос 3. Расчет условий распространения ЭМВ в различных средах.

Задача 3. Определить, какую толщину должны иметь стенки волновода для того, чтобы поле не проникало из полости волновода во внешнее пространство, если $f = 3\,000 \text{ МГц}$, ослабление поля не менее 10^5 раз, стенки волновода медные $\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, диэлектрик – воздух.

Решение

1. Пусть напряженность электрического поля на границе «диэлектрик – стенка волновода» равна $E_m(l_1)$, а внутри стенки – $E_m(l_2)$, тогда



$$\frac{E_m(l_1)}{E_m(l_2)} = 10^5 = \frac{e^{-k'' \cdot l_1}}{e^{-k'' \cdot l_2}} = e^{k'' \cdot (l_2 - l_1)} = e^{k'' \cdot \Delta l}$$

$$\ln e^{k'' \cdot \Delta l} = \ln 10^5 \Rightarrow k'' \cdot \Delta l = \ln 10^5;$$

$$\Delta l = \frac{\ln 10^5}{k''} = \frac{5 \cdot \ln 10}{k''} = \frac{2,3 \cdot 5}{k''} = \frac{11,5}{k''}$$

$$k'' = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_a \cdot \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot f \cdot \mu_a \cdot \sigma}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}{2}} \approx 8,2 \cdot 10^5 \text{ Нп/м.}$$

2. Определим ширину стенок волновода

$$\Delta l = \frac{11,5}{8,2 \cdot 10^5} = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,014 \text{ мм.}$$

Вывод. В реальных волноводах толщина стенок значительно превышает расчетную, поэтому практически ЭМП не проникает во внешнее пространство.

Задача 4. Длина волны электромагнитного колебания в воздухе $\lambda = 300 \text{ м}$. Чему равна длина волны той же частоты в морской воде ($\sigma = 4 \text{ См/м}$) и в меди ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7 \text{ См/м}$).

Решение

1. Определим частоту электромагнитного колебания в воздухе:

$$f = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{3 \cdot 10^2 \text{ м}} = 1 \cdot 10^6 \text{ Гц.}$$

2. Определим длину волны электромагнитного колебания частотой 1 МГц в морской воде

$$\lambda_{\text{в морской воде}} = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega\mu_a\sigma}{2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4}{2}}} = 1,57 \text{ м.}$$

3. Определяем длину волны электромагнитного колебания частотой 1 МГц в меди

$$\lambda_{\text{в меди}} = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5,7 \cdot 10^7}{2}}} = 0,42 \text{ м.}$$

Вывод. При увеличении проводимости среды длина волны ЭМП уменьшается.

Задача 5. Определить эквивалентную глубину проникновения ЭМВ в морскую воду при частотах $f_1 = 10 \text{ кГц}$ и $f_2 = 10\,000 \text{ МГц}$ ($\sigma = 4 \text{ См/м}$). В каком диапазоне волн целесообразно осуществлять радиосвязь с подводными объектами?

Решение

1. Находим эквивалентную глубину проникновения ЭМВ в морскую воду при частоте $f_1 = 10 \text{ кГц}$

$$\Delta_1 = \frac{1}{k_1''} = \sqrt{\frac{2}{\omega_1 \cdot \mu_0 \cdot \sigma}} = 2,5 \text{ м.}$$

2. Определим эквивалентную глубину проникновения ЭМВ в морскую воду при частоте $f_2 = 10\,000$ МГц

$$\Delta_2 = \frac{1}{k_2''} = \sqrt{\frac{2}{\omega_2 \cdot \mu_0 \cdot \sigma}} = 0,25 \text{ см.}$$

Вывод. Радиосвязь с подводными объектами целесообразно осуществлять на сверхдлинных волнах.

Вопрос 4. Расчет и анализ ЭМП на границе раздела двух сред.

Задача 6. На плоскую границу раздела двух сред падает плоская горизонтально поляризованная ЭМВ с комплексной амплитудой $\dot{E}_r = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ мВ/м. Найти амплитуду и фазу напряженности электрического поля отраженной и преломленной ЭМВ, если известно: $R_r = 0,3$; $\beta_r = 180^\circ$; $r_r = 0,7$; $\Psi_r = 0$.

Решение

1. Поскольку известно, что $\dot{R}_r = \dot{E}_{ог} / \dot{E}_r$, а $\dot{r}_r = \dot{E}_{пр} / \dot{E}_r$, то амплитуда отраженной от границы раздела двух сред волны

$$\dot{E}_{ог} = \dot{E}_r \cdot R_r \cdot e^{j\beta_r} = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 0,3 \cdot e^{j\pi} = 3 \cdot e^{j\frac{3\pi}{2}} \text{ мВ/м.}$$

2. Аналогично, амплитуда преломленной на границе раздела двух сред волны

$$\dot{E}_{пр} = \dot{E}_r \cdot r_r \cdot e^{j\beta_r} = 10 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot 0,7 \cdot e^{j0} = 7 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ мВ/м.}$$

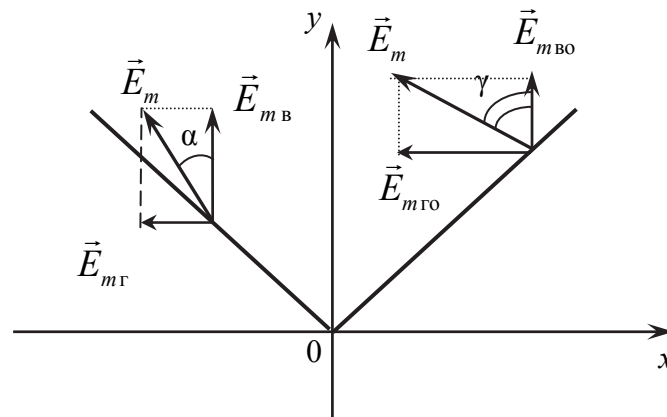
Задача 7. Линейно поляризованная плоская ЭМВ падает на границу раздела двух сред. Угол α между плоскостью падения и вектором \vec{E} падающей волны равен 30° . Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны $E_{mn} = 100$ мВ/м, $R_v = 0,3$; $R_r = 0,8$; $\beta_v = \beta_r = 180^\circ$. Определить амплитуду отраженной волны $E_{мо}$.

Решение

1. Проиллюстрируем условие задачи рисунком.

2. Разложим вектор \vec{E} падающей волны на вертикальную \vec{E}_v и горизонтальную \vec{E}_r составляющие и найдем их величины:

$$E_{mv} = E_m \cdot \cos \alpha; \quad E_{mr} = E_m \cdot \sin \alpha.$$



3. Определим величины вертикальной $\vec{E}_{\text{во}}$ и горизонтальной $\vec{E}_{\text{го}}$ составляющих отраженной волны:

$$E_{\text{мво}} = R_{\text{в}} E_{\text{mv}} = R_{\text{в}} E_m \cdot \cos \alpha;$$

$$E_{\text{мго}} = R_{\text{г}} E_{\text{mg}} = R_{\text{г}} E_m \cdot \sin \alpha.$$

4. Вектор отраженной волны \vec{E}_o найдем как векторную сумму ее вертикальной $\vec{E}_{\text{во}}$ и горизонтальной $\vec{E}_{\text{го}}$ составляющих. Амплитуда вектора отраженной волны \vec{E}_o

$$E_{\text{mo}} = \sqrt{E_{\text{мво}}^2 + E_{\text{мго}}^2} = \sqrt{(0,3)^2 \cdot 100^2 \cdot 0,75 + (0,8)^2 \cdot 100^2 \cdot 0,25} = 47,7 \text{ мВ/м.}$$

5. Так как между составляющими отраженной волны нет фазового сдвига ($\Psi_{\text{в}} = \Psi_{\text{г}}$), то поляризация отраженной волны линейная.

6. Поляризация отраженной волны зависит от значений $\beta_{\text{в}}$ и $\beta_{\text{г}}$ фазы коэффициентов отражения. Поскольку $\beta_{\text{в}} = \beta_{\text{г}}$, то поляризация отраженной волны будет линейной.

7. Определим угол γ наклона плоскости поляризации отраженной волны к плоскости падения:

$$\gamma = \arctg \frac{E_{\text{мго}}}{E_{\text{мво}}} = \arctg \frac{100 \cdot 0,8 \cdot 0,5}{100 \cdot 0,3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctg \frac{0,8}{0,3 \cdot 1,73} = 57^\circ.$$

Угол наклона плоскости поляризации отраженной волны отличается от угла наклона плоскости поляризации падающей волны ($\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 57^\circ$).

Задача 8. Для условия задачи 2 определить амплитуду и вид поляризации преломленной волны $E_{\text{мп}}$, если известно, что $\Psi_{\text{г}} = \Psi_{\text{в}} = 0$.

Р е ш е н и е

1. Известно, что $R + r = 1$, откуда следует, что

$$r_B = 1 - R_B = 1 - 0,3 = 0,7;$$

$$r_G = 1 - R_G = 1 - 0,8 = 0,2.$$

2. Определим амплитуды вертикальной $E_{mвп}$ и горизонтальной $E_{mгп}$ составляющих преломленной волны:

$$E_{mвп} = r_B \cdot E_{mв} = r_B \cdot E_m \cdot \cos \alpha;$$

$$E_{mгп} = r_G \cdot E_{mг} = r_G \cdot E_m \cdot \sin \alpha.$$

3. Вектор преломленной волны $\vec{E}_п$ определим как векторную сумму ее вертикальной $\vec{E}_{вп}$ и горизонтальной $\vec{E}_{гп}$ составляющих. Амплитуда вектора преломленной волны $\vec{E}_п$

$$E_{мп} = \sqrt{E_{mвп}^2 + E_{mгп}^2} = \sqrt{(0,7)^2 \cdot 100^2 \cdot 0,75 + (0,2)^2 \cdot 100^2 \cdot 0,25} = 61,4 \text{ мВ/м.}$$

Задача 9. Волна круговой поляризации левого вращения падает под углом Брюстера на плоскую границу раздела двух диэлектриков с относительными параметрами $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Определить величину угла Брюстера и амплитуду отраженной волны, если амплитуда падающей волны $0,02 \text{ В/м}$.

Решение

1. Для угла Брюстера известна формула $\text{tg} \alpha_B = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}$. Отсюда находим угол Брюстера:

$$\alpha_B = \text{arctg} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} = \text{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ.$$

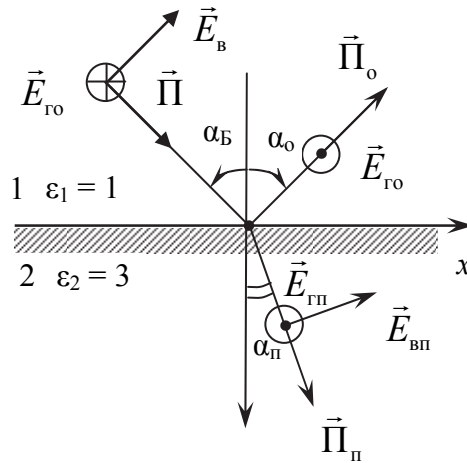
2. Волну с круговой поляризацией можно представить в виде суммы вертикально и горизонтально поляризованных волн. При падении под углом Брюстера вертикально поляризованная волна не отразится от границы раздела, поэтому отраженная волна будет иметь только горизонтальную (линейную) поляризацию.

3. Амплитуду напряженности отраженного электрического поля находим по формуле

$$E_{mo} = |\vec{E}_{го} + \vec{E}_{во}| = |\vec{E}_Г R_G + \vec{E}_B R_B|.$$

4. Вычислим коэффициенты отражения $R_B = 0$, так как волна падает под углом Брюстера:

$$\dot{R}_Г = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cdot \cos \alpha_B - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_B}}{\sqrt{\epsilon_1} \cdot \cos \alpha_B + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_B}} = \frac{0,5 - 1,5}{0,5 + 1,5} = -0,5 = 0,5 \cdot e^{\pm j\pi}.$$



5. Подставим полученные значения и находим амплитуду электрического поля

$$E_{mo} = |\vec{E}_{го} + \vec{E}_{бо}| = |\vec{E}_r R_r|.$$

6. Определим амплитуду горизонтальной составляющей \vec{E}_r падающей поляризованной по кругу ЭМВ из условия, что

$$E_m = \sqrt{E_{mг} + E_{mп}} = \sqrt{2E_{mг}} \Rightarrow$$

$$E_{mг} = \frac{E_m^2}{2} = \frac{0,02^2}{2} = 0,0002 \text{ мВ/м.}$$

7. Подставляем полученные значения и определяем

$$E_{mo} = E_{mг} \cdot |\dot{R}_r| = 0,0002 \cdot 0,5 = 0,0001 \text{ В/м.}$$

Вопрос 5. Анализ падения ЭМВ в оптически менее плотную среду.

Задача 10. Плоская электромагнитная волна, вектор \vec{E} напряженности электрического поля которой лежит в плоскости падения, падает из диэлектрика с параметрами $\mu_1 = 1, \epsilon_1 = 9, \sigma_1 = 0$ на поверхность диэлектрика с параметрами $\mu_2 = 1, \epsilon_2 = 1, \sigma_2 = 0$. При каких углах падения:

- вся энергия падающей волны переходит во вторую среду?
- вся энергия падающей волны отражается от границы раздела?

Решение

1. Поскольку вектор \vec{E} напряженности электрического поля лежит в плоскости падения, то поляризация ЭМВ – вертикальная.

2. По условию задачи – среда немагнитная ($\epsilon_1 \neq \epsilon_2, \mu_1 = \mu_2 = 1$). Падающая волна полностью проходит во вторую среду, если угол падения равен углу Брюстера.

Угол Брюстера

$$\alpha_B^B = \arctg \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1} = \arctg \sqrt{1/9} = \arctg 0,33 = 18,43^\circ.$$

3. Вся энергия падающей волны полностью отражается при угле преломления $\alpha_{\text{п}} = 90^\circ$. При этом

$$\alpha_{\text{пво}} = \arcsin \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1} = \arcsin \sqrt{1/9} = \arcsin 0,33 = 19,47^\circ.$$

Вся энергия падающей волны полностью отражается при $\alpha_{\text{пво}} = 19,47^\circ$.

Выводы:

1. При падении под углом Брюстера волны, поляризованной по кругу, отраженная волна будет иметь только горизонтальную (линейную) поляризацию.

2. Вся энергия падающей волны полностью отражается при угле преломления $\alpha_{\text{п}} = 90^\circ$.

Задача 11. Плоская гармоническая линейно поляризованная волна падает из сухого воздуха на почву (полупроводник) под углом α . Вектор падающей волны \vec{E} образует с плоскостью падения угол i . Качественно оценить поляризацию отраженной волны в зависимости от угла падения для случаев:

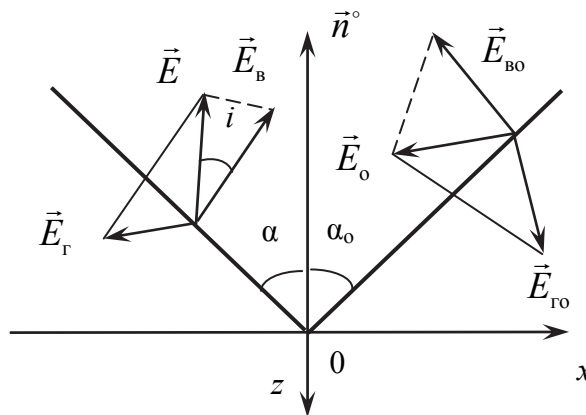
- а) $i = 0^\circ$;
- б) $i = 90^\circ$;
- в) $0 < i < 90^\circ$.

Решение

1. Падающую волну с наклонной поляризацией вектора \vec{E} можно представить в виде суммы двух волн, одна из которых поляризована вертикально, а другая – горизонтально:

$$\vec{E} = \vec{E}_B + \vec{E}_r$$

где $|\vec{E}_B| = |\vec{E}| \cdot \cos i$; $|\vec{E}_r| = |\vec{E}| \cdot \sin i$



2. Для падающей волны в некоторой точке 0 на границе раздела можно записать $\vec{E}(0) = \vec{E}_B(0) + \vec{E}_T(0)$,

$$\left. \begin{aligned} E_B(0) &= E(0) \cdot \cos i; \\ E_T(0) &= E(0) \cdot \sin i. \end{aligned} \right\}$$

Для простоты считаем что фаза вектора \vec{E} равна 0

3. Тогда для отраженной волны в точке 0 имеем

$$\vec{E}_o(0) = \vec{E}_{об}(0) + \vec{E}_{от}(0),$$

где

$$\vec{E}_{об}(0) = \dot{R}_B E(0) \cdot \cos i = |R_B| \cdot E(0) \cdot \cos i = e^{j\Psi_B}$$

$$\vec{E}_{от}(0) = \dot{R}_T E(0) \cdot \sin i = |R_T| \cdot E(0) \cdot \sin i = e^{j\Psi_T}$$

$$\vec{E}_o(0) = \vec{x}^{\circ n} \cdot E_{об}(0) + \vec{y}^{\circ n} \cdot E_{от}(0). \quad (1)$$

Выражение (1) – это уравнение эллипса в параметрической форме. Так как

$$\Psi_T - \Psi_B \neq 0; \Psi_T - \Psi_B \neq 180; \text{ и } m \neq 1 \quad (m = |R_B| \cdot \cos i, |R_T| \cdot \sin i)$$

отраженная волна будет эллиптически поляризованной.

4. Для случая $i = 0$ имеем

$$E_B(0) = E(0) \cos 0^\circ = E(0);$$

$$E_T(0) = E(0) \sin 0^\circ = 0.$$

Следовательно,

$$E_{об}(0) = E_o(0); \quad E_{от}(0) = 0.$$

5. Для случая $i = 90^\circ$ имеем

$$E_B(0) = E(0) \cos 90^\circ = 0; \quad E_{об}(0) = 0;$$

$$E_T(0) = E(0) \sin 90^\circ = E(0); \quad E_{от}(0) = E(0)$$

Следовательно, при $i = 0$ или 90° отраженная волна линейно поляризована и угол наклона вектора отраженной волны \vec{E} и плоскости падения равен соответственно $i_o = 0^\circ$ или $i_o = 90^\circ$.

6. Для случая $0 < i < 90^\circ$ отраженная от полупроводящей среды волна будет иметь эллиптическую поляризацию в пределах углов падения $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Основные формулы векторного анализа

1. **Скалярное произведение двух векторов \vec{A} и \vec{B} есть скаляр C , определяемый равенством**

$$C = (\vec{A}, \vec{B}) = AB \cos \varphi = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

где φ – угол между векторами \vec{A} и \vec{B} .

2. **Векторное произведение двух векторов \vec{A} и \vec{B} есть вектор \vec{C} , перпендикулярный векторам \vec{A} и \vec{B} и составляющий с ними правую тройку, определяемый равенством**

$$C = [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{c}^\circ AB \sin \varphi = \begin{vmatrix} \vec{x}^\circ & \vec{y}^\circ & \vec{z}^\circ \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

где \vec{c}° – орт нормали к плоскости, в которой лежат оба вектора.

$$[\vec{A}, \vec{B}] = -[\vec{B}, \vec{A}].$$

3. **Смешанное произведение трех векторов \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} есть скаляр, равный объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} и взятый со знаком «+», если эти вектора образуют правую тройку, и «-», если наоборот:**

$$[\vec{A}, \vec{B}] \vec{C} = \vec{A} [\vec{B}, \vec{C}] = [\vec{B}, \vec{C}] \vec{A} = [\vec{C}, \vec{A}] \vec{B} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

4. **Двойное векторное произведение есть вектор, который может быть вычислен по формуле**

$$[\vec{A} [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B} (\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A}, \vec{B}).$$

5. **Градиент скалярной функции – вектор, определенный в каждой точке поля, имеющий направление нормали к поверхности уровня (в сторону возрастания):**

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}^\circ.$$

Выражение градиента в различных системах координат:

- прямоугольные координаты ($\vec{z}^\circ = [\vec{x}^\circ, \vec{y}^\circ]$)

$$\text{grad } \varphi = \vec{x}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{y}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{z}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

- цилиндрические координаты ($\vec{z}^\circ = [\vec{r}^\circ, \vec{\varphi}^\circ]$)

$$\text{grad } \varphi = \vec{r}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\varphi}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} + \vec{z}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

- сферические координаты ($\vec{r}^\circ = [\vec{\theta}^\circ, \vec{\varphi}^\circ]$)

$$\text{grad } \varphi = \vec{r}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\theta}^\circ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{\varphi}^\circ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}.$$

$\text{grad } (C) = 0$, где $C = \text{const}$;

$\text{grad } (C \cdot a) = C \cdot \text{grad } (a)$;

$\text{grad } (a + b) = \text{grad } (a) + \text{grad } (b)$;

$\text{grad } (a \cdot b) = b \text{ grad } (a) + a \text{ grad } (b)$;

$\text{grad } \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{b \text{ grad } (a) - a \text{ grad } (b)}{b^2}$;

$\text{grad } (f(u)) = f'(u) \text{ grad } (u)$.

6. Оператор Гамильтона (набла) вводится для упрощения вычислений в векторном анализе. Он заменяет символы градиента, дивергенции, ротора. Символическая запись градиента функции:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi.$$

Формально эту запись можно рассматривать как произведение вектора ∇ на скаляр φ .

7. Оператор Лапласа. Вводится для удобства вычисления, когда требуется двукратное применение оператор Гамильтона:

- прямоугольные координаты

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

- цилиндрические координаты

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

- сферические координаты

$$\nabla^2 = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$

8. **Дивергенция вектора – скаляр**, определенный в каждой точке поля и являющийся объемной производной этого вектора:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int \vec{D} d\vec{s}}{V} = \nabla \vec{D};$$

- прямоугольные координаты

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z};$$

- цилиндрические координаты

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{D_r}{r} + \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z};$$

- сферические координаты

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta).$$

$\operatorname{div} \vec{C} = 0$, где $\vec{C} = \text{const}$;

$\operatorname{div} (\vec{C}, \varphi) = \vec{C} \operatorname{grad} (\varphi)$;

$\operatorname{div} (C, \vec{a}) = C \operatorname{div} (\vec{a})$;

$\operatorname{div} (\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} (\vec{a}) + \operatorname{div} (\vec{b})$;

$\operatorname{div} (\varphi, \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} (\vec{a}) + \vec{a} \operatorname{grad} (\varphi)$;

$\operatorname{div} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} (\vec{a}) - \vec{a} \operatorname{rot} (\vec{b})$.

9. **Ротор вектора – вектор**, определенный в каждой точке поля и являющийся объемной производной этого вектора, взятой с обратным знаком:

$$\operatorname{rot} \vec{D} = - \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int [\vec{D}, d\vec{s}]}{V} = [\nabla, \vec{D}];$$

- прямоугольные координаты

$$\operatorname{rot} \vec{D} = \begin{vmatrix} \vec{x}^\circ & \vec{y}^\circ & \vec{z}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix};$$

- цилиндрические координаты

$$\operatorname{rot} \vec{D} = \begin{vmatrix} \vec{x}^\circ & \vec{\varphi}^\circ & \vec{z}^\circ \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_\varphi & D_z \end{vmatrix};$$

- сферические координаты

$$\operatorname{rot} \vec{D} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{r}^\circ}{r^2 \sin \theta} & \frac{\vec{\theta}^\circ}{r \sin \theta} & \frac{\vec{\varphi}^\circ}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ D_r & r D_\theta & r \sin \theta D_\varphi \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{C} &= 0, \text{ где } \vec{C} = \text{const}; \\ \operatorname{rot} (C, \vec{a}) &= C \operatorname{rot} (\vec{a}); \\ \operatorname{rot} (\varphi, \vec{a}) &= \varphi \operatorname{rot} (\vec{a}) + [\operatorname{grad} \varphi, \vec{a}]; \\ \operatorname{rot} (\varphi, \vec{C}) &= [\operatorname{grad} \varphi, \vec{C}]; \\ \operatorname{rot} (\vec{a} + \vec{b}) &= \operatorname{rot} (\vec{a}) + \operatorname{rot} (\vec{b}). \end{aligned}$$

10. Символическая запись некоторых операций:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} (\varphi) &= \nabla^2 \varphi; \\ \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{a}) &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}; \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} (\varphi) &= 0; \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} (\vec{a}) &= 0; \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} (\vec{a}) &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{a}) + \nabla^2 \vec{a}. \end{aligned}$$

11. Поток вектора \vec{a} через поверхность S :

$$\Phi = \int_S \vec{a} d\vec{s} = \int_S a_n ds,$$

где $d\vec{s} = \vec{n}^\circ ds$;

\vec{n}° – нормаль к поверхности S .

12. **Циркуляция вектора \vec{a} по контуру l :**

$$\text{Ц} = \oint_l \vec{a} d\vec{l} = \int_S a_1 dl,$$

где dl – элемент замкнутого контура l ;

a_1 – проекция вектора \vec{a} на элемент контура l .

13. **Теорема Остроградского-Гаусса:**

$$\oint_S \vec{a} d\vec{s} = \int_V \text{div } \vec{a} dv.$$

14. **Теорема Стокса:**

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} d\vec{s}.$$

Учебное издание

Филонов Андрей Александрович
Фомин Алексей Николаевич
Тяпкин Валерий Николаевич
Дмитриев Дмитрий Дмитриевич

Фатеев Юрий Леонидович
Марарескул Татьяна Александровна
Ищук Игорь Николаевич

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАДИОЛОКАЦИИ И РАДИОНАВИГАЦИИ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Под общей редакцией А.А. Филонова

Редактор *Е.Г. Иванова*
Компьютерная верстка *О.А. Кравченко*

Подписано в печать 30.12.2015. Печать плоская. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 13,6. Тираж 500 экз. Заказ № 3782

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391) 206-26-67; <http://bik.sfu-kras.ru>
E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru