



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ И РАДИОНАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Учебник

Министерство
обороны РФ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ И РАДИОНАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рекомендуется Федеральным государственным казенным военным образовательным учреждением высшего профессионального образования ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации в качестве учебника для курсантов учебного военного центра Военно-инженерного института Сибирского федерального университета, обучающихся по специальностям 11.05.01 – «Радиоэлектронные системы и комплексы» и 09.05.01 – «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения», рег. номер 443 от 02.09.2015 г.

Красноярск
СФУ
2015

УДК 517.5:621.396.96(07)
ББК 22.16я73+32.959я73
М340

Авторы:

П.И. Анферов, И.В. Шевелева, Е.Н. Гарин, И.В. Лютиков,
В.А. Леусенко, Н.С. Кремез

М340 **Математические методы цифровой обработки радиолокационной и радионавигационной информации** : учебник / П.И. Анферов, И.В. Шевелева, Е.Н. Гарин [и др.]. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2015. – 252 с.
ISBN 978-5-7638-3363-8

В учебнике изложены краткая теория рядов и интеграла Фурье, операционного исчисления на основе непрерывного и дискретного преобразований Лапласа и Z-преобразования. Даны примеры решения типичных задач и варианты индивидуальных заданий. Приведены указания по применению программы Mathcad для спектрального анализа функций и решения дифференциальных и разностных уравнений операционным методом.

Предназначен для курсантов учебного военного центра Военно-инженерного института Сибирского федерального университета, обучающихся по специальностям 11.05.01 – «Радиоэлектронные системы и комплексы» и 09.05.01 – «Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения».

Электронный вариант издания см.:
<http://catalog.sfu-kras.ru>

УДК 517.5:621.396.96(07)
ББК 22.16я73+32.959я73

ISBN 978-5-7638-3363-8

© Сибирский федеральный университет, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящего учебника – ознакомить студентов и курсантов с теорией рядов Фурье¹, интеграла Фурье и операционным исчислением и показать, как эти теории применяются для решения практических задач.

В учебнике² изложены основные положения теории рядов Фурье и интеграла Фурье, а также операционного исчисления. На основе теории рядов Фурье по произвольной ортогональной системе функций как частный случай вводится тригонометрический ряд Фурье, для вычисления коэффициентов которого даны важные рекомендации. Рассмотрены примеры разложений функций в ряды Фурье и спектрального анализа периодических и непериодических сигналов. Изложена теория операционного исчисления для функций непрерывного и дискретного аргументов. Приведены примеры применения операционного исчисления для решения практических задач. Метод операционного исчисления состоит в том, что изучается не сама функция (оригинал), а ее видоизменение (изображение), которое получается путем некоторого усреднения оригинала во времени. Зависимости для поиска изображения существенно проще, чем таковые для оригинала. После нахождения изображения оригинал восстанавливается по таблицам или путем специальных вычислений. Приведены задания для самостоятельной работы, выполнение которых способствует формированию практических навыков использования данной теории.

Предлагаемый учебник дает возможность обучающимся изучить теоретические основы спектрального анализа с использованием рядов и интеграла Фурье, операционного исчисления и получить практические навыки, выполняя упражнения и индивидуальные задания.

Для автоматизации Фурье-анализа функций, спектрального и корреляционного анализа сигналов, а также нахождения изображений и оригиналов в операционном исчислении даны необходимые указания и приведены примеры по применению программы Mathcad.

Авторы надеются на то, что учебник поможет студентам и курсантам успешно освоить данные разделы математики и применять приобретенные знания в дальнейшем не только при изучении специальных дисциплин: "Основы теории цепей", "Радиотехнические цепи и сигналы", "Основы построения РЛС", "Цифровая обработка сигналов", "Устройства генерирования и формирования сигналов", "Устройства приема и преобразования сигналов", "Радиоавтоматика", "Основы теории радиолокации

¹Фурье Жан Батист Жозеф (1768–1830) – французский математик и физик.

²Учебник подготовлен к печати с помощью издательской системы L^AT_EX.

онных систем и комплексов”, ”Основы обработки и передачи информации в АСУ соединения ВВС”, ”Основы построения АСУ соединения ВВС”, но и в будущей профессиональной деятельности.

Учебник рекомендуется Федеральным государственным казенным военным образовательным учреждением высшего профессионального образования ВУНЦ ВВС ”Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина”(г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации” в качестве учебника для курсантов учебного военного центра Военно-инженерного института Сибирского федерального университета, обучающихся по специальностям 11.05.05 ”Радиоэлектронные системы и комплексы” и 09.05.01 ”Применение и эксплуатация автоматизированных систем специального назначения”.

Авторы выражают благодарность доценту кандидату физико-математических наук А. В. Васильевой за ряд полезных замечаний и предложений.

1. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

1.1. Ортогональная система функций

Определение 1.1. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

Известно, что кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на нем.

Определение 1.2. Скалярным произведением (f, φ) двух кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ назовем интеграл:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx. \quad (1.1)$$

Очевидно, что для так определенного скалярного произведения справедливы следующие *свойства*:

- 1) $(f, \varphi) = (\varphi, f)$;
- 2) $(f + \varphi, g) = (f, g) + (\varphi, g)$;
- 3) $(\lambda f, \varphi) = \lambda(f, \varphi)$, где λ – любое число;
- 4) $(f, f) > 0$, если $f(x) \neq 0$; $(f, f) = 0$, если $f(x) \equiv 0$.

Следовательно, множество кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением (1.1) является евклидовым пространством. Из курса линейной алгебры известно, что во всяком евклидовом пространстве для любых двух его элементов f и φ справедливо *неравенство Коши – Буняковского*¹

$$(f, \varphi)^2 \leq (f, f) \cdot (\varphi, \varphi), \quad (1.2)$$

которое в соответствии с определением (1.1) можно записать в виде

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x) dx \quad (1.2a)$$

¹Коши Огюстен Луи (1789–1857) – французский математик. Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) – российский математик.

или

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) dx}. \quad (1.26)$$

Определение 1.3. Нормой $\|f\|$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} = \sqrt{(f, f)}. \quad (1.3)$$

Тогда неравенство Коши – Буняковского (1.26) можно записать в виде $|(f, \varphi)| \leq \|f\| \cdot \|\varphi\|$.

Для нормы справедливы следующие свойства:

- 1) $\|f\| \geq 0$;
- 2) $\|f + \varphi\| \leq \|f\| + \|\varphi\|$;
- 3) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$, где λ – любое число.

Определение 1.4. Два элемента f и φ называются *ортгоналъными* на отрезке $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0.$$

Определение 1.5. Система кусочно-непрерывных функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots \quad (1.4)$$

называется *ортгоналъной* на отрезке $[a, b]$, если функции этой системы попарно ортгоналъны, т. е.

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n \cdot \varphi_m dx = 0 \text{ при } n \neq m.$$

При этом полагаем, что $\|\varphi_n\| > 0$, т. е. что в системе нет функций, норма которых равна нулю.

Определение 1.6. Система функций (1.4) называется *ортонормированной* на отрезке $[a, b]$, если

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Теорема 1.1. Любую ортогональную систему функций $\{\varphi_n\}$, $n=1, 2, \dots$, можно нормировать.

Доказательство. В самом деле, умножив каждую функцию φ_n на число $\lambda_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|}$, получим $\|\lambda_n \varphi_n\| = |\lambda_n| \cdot \|\varphi_n\| = \frac{1}{\|\varphi_n\|} \cdot \|\varphi_n\| = 1$ и $(\lambda_n \varphi_n, \lambda_m \varphi_m) = \lambda_n \lambda_m (\varphi_n, \varphi_m) = 0$ при $n \neq m$.

Пример 1.1. Проверить ортогональность системы функций $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = 3x^2 - 6x - 1$ на отрезке $[-1; 3]$ и затем нормировать ее.

Решение. Проверим ортогональность заданной системы функций:

$$\int_{-1}^3 f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_{-1}^3 1 \cdot (x - 1) dx = 0;$$

$$\int_{-1}^3 f_1(x) \cdot f_3(x) dx = \int_{-1}^3 1 \cdot (3x^2 - 6x - 1) dx = (x^3 - 3x^2 - x) \Big|_{-1}^3 = 0;$$

$$\int_{-1}^3 f_2(x) \cdot f_3(x) dx = \int_{-1}^3 (x - 1) \cdot (3x^2 - 6x - 1) dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^3 = 0.$$

Итак, система функций ортогональна. Нормируем эту систему.

$$\begin{aligned} \|f_1(x)\| &= \sqrt{\int_{-1}^3 1^2 dx} = 2; & f_1^*(x) &= \frac{1}{2}; \\ \|f_2(x)\| &= \sqrt{\int_{-1}^3 (x - 1)^2 dx} = \frac{4}{\sqrt{3}}; & f_2^*(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4}(x - 1); \\ \|f_3(x)\| &= \sqrt{\int_{-1}^3 (3x^2 - 6x - 1)^2 dx} = \frac{16}{\sqrt{5}}; & f_3^*(x) &= \frac{\sqrt{5}}{16}(3x^2 - 6x - 1). \end{aligned}$$

Функции $f_1^*(x)$, $f_2^*(x)$, $f_3^*(x)$ образуют ортонормированную систему на отрезке $[-1; 3]$.

Пример 1.2. Доказать, что общая тригонометрическая система функций $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$ ортогональна на любом отрезке длины $2l$, а если первую функцию разделить на $\sqrt{2l}$ и каждую из остальных – на \sqrt{l} , то система функций будет ортонормированной.

Решение. Так как все эти функции имеют период $2l$, то достаточно проверить утверждения примера на отрезке длины $2l$, например на отрезке $[-l, l]$. Предоставляем читателю проверить это.

Итак,

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0$$

при $n \neq m$ и

$$\int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l, \quad \int_{-l}^l 1^2 dx = 2l.$$

Система функций $\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{n\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$ ортонормированная.

1.2. Ряд Фурье по произвольной ортогональной системе функций

Пусть

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots \quad (1.5)$$

является бесконечной ортогональной на отрезке $[a, b]$ системой функций, норма которых отлична от нуля, и $f(x)$ – интегрируемая на этом отрезке функция. Функциональный ряд

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 + \dots + C_n\varphi_n + \dots \quad (1.6)$$

с коэффициентами

$$C_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi_n(x) dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ по системе функций (1.5). Числа C_n называют *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по системе функций (1.5). Запишем

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_i)}{\|\varphi_i\|^2} \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi_i(x) dx}{\int_a^b \varphi_i^2(x) dx} \varphi_i(x). \quad (1.8)$$

Символ \sim в формуле (1.8) означает, что функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье, записанный справа. Знак \sim можно заменить знаком "равно" ($=$) только тогда, когда будет доказана сходимость ряда и равенство его суммы $S(x)$ функции $f(x)$. Если система функций (1.5) ортонормированная ($\|\varphi_i(x)\| = 1$), то ряд Фурье функции $f(x)$ примет вид

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \int_a^b f(x) \cdot \varphi_i(x) dx.$$

Величину $\|f - g\|$ называют *отклонением функции $g(x)$ от $f(x)$* по норме данного евклидова пространства.

Теорема 1.2. Если система (1.5) ортогональна, то норма $\Delta_N = \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x) \right\|$ достигает своего наименьшего значения, когда коэффициенты $\alpha_k = C_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$, $k = 1, 2, \dots, N$, т. е. являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим квадрат нормы:

$$\begin{aligned} \Delta_N^2 &= \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x) \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x), f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x) \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^N \alpha_k (f, \varphi_k(x)) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 (\varphi_k(x), \varphi_k(x)) + \sum_{k \neq m} \alpha_k \alpha_m (\varphi_k(x), \varphi_m(x)). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как система функций (1.5) ортогональна. Поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_N^2 &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^N \alpha_k \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} \|\varphi_k(x)\|^2 + \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2 = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^N \alpha_k C_k \|\varphi_k(x)\|^2 + \sum_{k=1}^N C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2 - \sum_{k=1}^N C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2 + \\ &+ \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k - C_k)^2 \|\varphi_k(x)\|^2 - \sum_{k=1}^N C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\Delta_N^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^N (\alpha_k - C_k)^2 \|\varphi_k(x)\|^2 - \sum_{k=1}^N C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2. \quad (1.9)$$

При $\alpha_k = C_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, квадрат отклонения Δ_N^2 будет наименьшим, так как при этом среднее слагаемое в формуле (1.9) обращается в нуль, а остальные слагаемые от α_k не зависят. Поэтому

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x) \right\|^2 \geq \left\| f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2. \quad (1.10)$$

При $\alpha_k = C_k$ выражение (1.9) принимает вид

$$\int_a^b \left(f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx, \quad (1.11)$$

которое называется *тождеством Бесселя*¹.

Так как левая часть в тождестве Бесселя неотрицательна, то из него при любом N имеем

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \sum_{k=1}^N C_k^2 \int_a^b \varphi_k^2(x) dx.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от N , а правая не убывает при возрастании N и ограничена значением интеграла. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2$ сходится. Тогда

$$\int_a^b f^2(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2. \quad (1.12)$$

Неравенство (1.12) называется *неравенством Бесселя*.

1.3. Полные системы функций

Определение 1.7. Ортогональная на отрезке $[a, b]$ система функций (1.5) называется *полной*, если для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом имеет место *равенство Парсеваля – Стеклова*²:

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2, \quad (1.13)$$

где C_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

¹Бессель Фридрих Вильгельм (1784–1846) – немецкий астроном и геодезист.

²Парсеваль Марк-Антуан (1755–1836) – французский математик. Стеклов Владимир Андреевич (1864–1926) – российский математик.

Если выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, то, переходя к пределу в тождестве Бесселя (1.11), получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left(f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = 0$$

или

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(x) \right\|^2 = 0 \quad (1.14)$$

и, наоборот, из (1.14) следует (1.13).

Если выполняется равенство (1.13) или (1.14), то говорят, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции *в среднем*.

Теорема 1.3. Если система функций (1.5) полная, то не существует непрерывной функции $f(x)$, не равной нулю тождественно и ортогональной всем функциям системы (1.5).

Доказательство. Если функция $f(x)$ ортогональна ко всем функциям системы (1.5), то это означает, что все коэффициенты Фурье $C_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, а из условия полноты (1.13) следует $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. Отсюда, в силу непрерывности функции $f(x)$, следует, что $f(x) = 0$.

Отметим, без доказательства, что ряд Фурье может сходиться к функции в среднем, т. е. выполняется равенство Парсеваля – Стеклова, но не сходится к функции в обычном смысле, т. е. $f(x) \neq \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$.

Теорема 1.4. Если система функций (1.5) полная, функции системы непрерывны и ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ сходится равномерно, то его сумма совпадает с $f(x)$, т. е. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$.

В дисциплине "Радиотехнические цепи и сигналы" вводятся понятия энергии и мощности сигнала. Если $f(t)$ – сигнал, заданный в промежутке времени $[t_1, t_2]$, а система функций (1.5) ортогональна на этом промежутке, то энергия сигнала $f(t)$ определяется равенством Парсеваля – Стеклова:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\varphi_k\|^2, \quad (1.15)$$

где C_k – коэффициенты Фурье, а средняя мощность (на единичном сопротивлении) $P = \frac{E}{t_2 - t_1}$.

1.4. Тригонометрические ряды Фурье

Общая тригонометрическая система функций

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (1.16)$$

ортогональна на любом отрезке длины $2l$, норма первой функции равна $\sqrt{2l}$, а каждой другой – \sqrt{l} (см. пример 1.2 на с. 7).

Пусть $f(x)$ – любая периодическая, с периодом $T=2l$, интегрируемая на отрезке $[-l, l]$ функция. Обозначим коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n=1, 2, \dots$, через a_n и b_n , а функции 1 – через $\frac{a_0}{2}$. Тогда (см. формулы (1.7))

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad (1.17)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ по системе функций (1.16) примет вид

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (1.18)$$

Этот ряд представляет сумму периодических функций с периодом $2l$, и если он сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом $2l$ ($S(x) = S(x+2l)$).

Замечание. Поскольку в формулах (1.17) интегрируются функции периода $2l$ по промежутку длиной $2l$, то отрезок интегрирования $[-l, l]$ может быть заменен любым другим отрезком $[a, a+2l]$ той же самой длины.

Действительно, если $\varphi(x) = \varphi(x+2l)$, то $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x+2l) dx$, где a и b – произвольные числа. Сделаем замену $t = x+2l$, $dx = dt$, тогда $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{a+2l}^{b+2l} \varphi(t) dt = \int_{a+2l}^{b+2l} \varphi(x) dx$. К обеим частям последней формулы

прибавим интеграл $\int_b^{a+2l} \varphi(x) dx$:

$$\int_a^b \varphi(x) dx + \int_b^{a+2l} \varphi(x) dx = \int_{a+2l}^{b+2l} \varphi(x) dx + \int_b^{a+2l} \varphi(x) dx.$$

Объединив интегралы в обеих частях последнего выражения, получим

$$\int_a^{a+2l} \varphi(x) dx = \int_b^{b+2l} \varphi(x) dx. \quad (1.19)$$

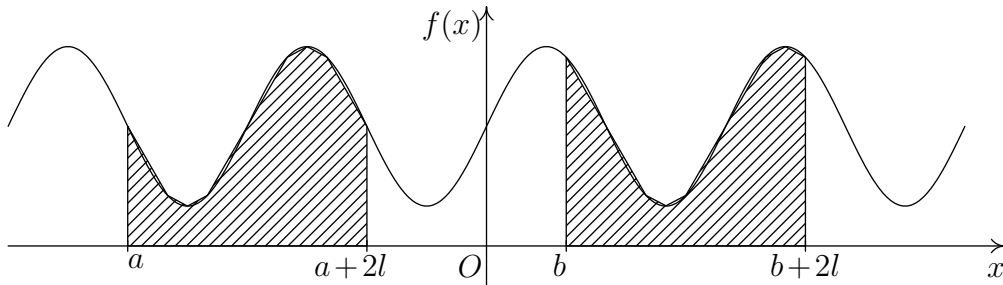


Рис. 1.1

Равенство (1.19) означает, что интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от расположения этого отрезка на числовой оси, что иллюстрирует рис. 1.1: заштрихованные площади равны между собой.

Поэтому наряду с (1.17) при вычислении a_n и b_n будем использовать следующие формулы:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (1.20)$$

где число a выбирают из соображений удобства вычислений интегралов.

Рассмотрим неравенство Бесселя $\int_a^b f^2(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2$ (см. формулу (1.12)) для ряда Фурье по тригонометрической системе функций. Так как $\|\varphi_0\|^2 = \|1\|^2 = 2l$; $\|\varphi_n\|^2 = \left\| \cos \frac{\pi n x}{l} \right\|^2 = \left\| \sin \frac{\pi n x}{l} \right\|^2 = l$, то неравенство Бесселя по системе функций (1.16) примет вид

$$\int_{-l}^l f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{4} \cdot 2l + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) l$$

или

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (1.21)$$

а равенство Парсеваля – Стеклова –

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (1.22)$$

Из выражения (1.22) следует, что если интеграл $\int_{-l}^l f^2(x) dx$ сходится, то сходится и ряд в правой части. Поэтому по необходимому признаку сходимости $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$, что равносильно существованию пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = 0, \quad (1.23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0. \quad (1.24)$$

Коэффициенты Фурье a_n, b_n любой функции, интегрируемой с квадратом, стремятся к нулю при увеличении номера n .

Справедливы и более общие равенства для непрерывной функции $f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = 0, \quad (1.25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 0, \quad (1.26)$$

где $[a, b]$ – некоторый конечный отрезок.

Если на отрезке $[a, b]$ производная $f'(x)$ существует, то равенства (1.25) и (1.26) очевидны, достаточно в них провести интегрирование по частям, например:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi x}{l} \Big|_a^b - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{\pi n} \int_a^b f'(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = 0.$$

1.5. Ряд Фурье для четной и нечетной функций

Функция $f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения функции $f(x)$. Отметим, что при этом область определения функции симметрична относительно начала координат.

Проинтегрируем $f(x)$ по отрезку $[-l, l]$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx. \quad (1.27)$$

В первом интеграле в правой части заменим x на $-x$:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = - \int_l^0 f(-x) dx + \int_0^l f(x) dx. \quad (1.28)$$

Если $f(x)$ нечетная, то $f(-x) = -f(x)$. Тогда равенство (1.28) перепишем в виде

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_l^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx = - \int_0^l f(x) dx + \int_0^l f(x) dx = 0. \quad (1.29)$$

Интеграл от любой нечетной функции по симметричному отрезку $[-l; l]$ равен нулю, если он существует.

Если $f(x)$ четная, то $f(-x) = f(x)$. Тогда равенство (1.28) перепишем в виде

$$\int_{-l}^l f(x) dx = - \int_l^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx = \int_0^l f(x) dx + \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx. \quad (1.30)$$

Интеграл от любой четной функции по симметричному отрезку $[-l; l]$ равен удвоенному интегралу от этой функции по отрезку $[0; l]$.

Если функция $f(x)$ четная, то $f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}$ есть также функция четная, а $f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}$ – функция нечетная. В этом случае из формул (1.17) с учетом (1.29) и (1.30) следует, что

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

Ряд Фурье примет вид

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

и будет содержать только косинусы.

Если функция $f(x)$ нечетная, то $f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$ есть функция нечетная, а $f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$ – функция четная. В этом случае из формул (1.17) с учетом (1.29) и (1.30) следует, что

$$a_0 = a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

Ряд Фурье примет вид

$$f(x) \sim S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

и будет содержать только синусы.

Сформулируем два достаточных признака сходимости рядов Фурье к функции $f(x)$ по системе функций (1.16).

Теорема 1.5. Если функция $f(x)$ периода $2l$ непрерывна на действительной оси и имеет кусочно-непрерывную производную на периоде, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней.

Признак Дирихле¹. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ ограничена на отрезке $[-l, l]$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(x)$ кусочно-непрерывна в промежутке $(-l, l)$,
- 2) промежуток $(-l, l)$ можно разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых функция монотонна,
- 3) в точке $-l$ она имеет предел справа, а в точке l имеет предел слева,

то ряд Фурье (1.18) этой функции сходится во всем промежутке $(-l, l)$ и его сумма $S(x)$ равна:

- а) $f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$;
- б) $S(x_i) = \frac{f(x_i+0) + f(x_i-0)}{2}$ – среднему арифметическому пределов справа и слева в точках разрыва x_i ;
- в) $S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

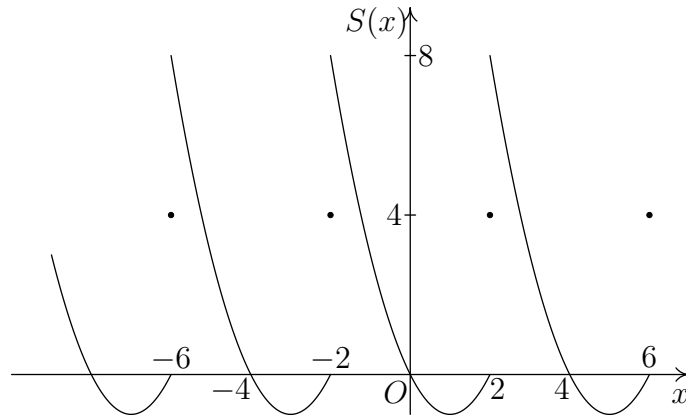


Рис. 1.2

Пусть, например, функция $f(x) = x^2 - 2x$ разложена в ряд Фурье на отрезке $[-2; 2]$:

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right).$$

Тогда на интервале $(-2; 2)$ сумма $S(x) = x^2 - 2x = f(x)$, а в точках $x = -2$ и $x = 2$ функция $f(x)$ терпит разрыв первого рода, поэтому

$$S(-2) = S(2) = \frac{f(-2+0) + f(2-0)}{2} = \frac{(-2)^2 - 2(-2) + 2^2 - 2 \cdot 2}{2} = 4.$$

На рис. 1.2 изображен график суммы $S(x)$ ряда Фурье функции $f(x) = x^2 - 2x$.

1.6. Разложение в ряд Фурье непериодических функций

В приложениях часто требуется разложить в ряд Фурье непериодическую функцию, заданную лишь на отрезке $[a, b]$. Отсутствие периодичности у функции не препятствует написанию ряда Фурье, так как в формулах (1.17) для коэффициентов Фурье интегрирование ведется по отрезку, длина которого равна периоду. Продолжив периодически функцию $f(x)$ с отрезка $[a, b]$ на всю числовую ось (рис. 1.3), получим периодическую, с периодом $2l = b - a$, совпадающую с $f(x)$ на $[a, b]$ функцию, для которой ряд Фурье будет тождественным с рядом Фурье для $f(x)$.

При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье в интервале (a, b) ко-

¹Дирихле Петер Густав Лежён (1805–1859) – немецкий математик.

эффиценты Фурье находят по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad (1.33)$$

где $l = \frac{b-a}{2}$.

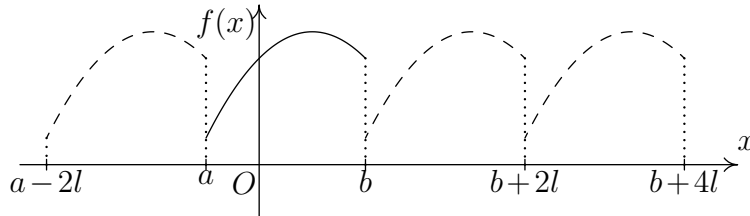


Рис. 1.3

Если непериодическая функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условиям (1–3) признака Дирихле (см. с. 16) и получен ее ряд Фурье, то сумма $S(x)$ ряда совпадает с функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в смысле признака Дирихле, а вне этого отрезка сумма $S(x)$ ряда Фурье является периодическим продолжением функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ задана на интервале $(0, l)$, то ее можно:

- 1) продолжить четным образом и получить разложение по косинусам,
- 2) продолжить нечетным образом и получить ряд, содержащий только синусы,
- 3) продолжить произвольным образом и получить ряд Фурье произвольного вида.

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[0; l]$. Продолжим ее нечетным образом на отрезок $[-l; 0]$. Полученную нечетную функцию с отрезка $[-l; l]$ периодически, с периодом $2l$, продолжим на всю ось Ox . Эта процедура отображена графически на рис. 1.4.

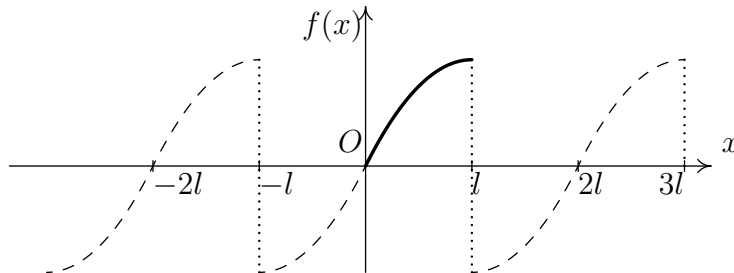


Рис. 1.4

Затем разлагаем $f(x)$ по синусам на отрезке $[0; l]$ в ряд Фурье, коэффициенты b_n которого вычисляются по формуле (1.32).

Теперь продолжим $f(x)$ четным образом на отрезок $[-l; 0]$ и получим четную на отрезке $[-l; l]$ функцию, которую периодическим продолжением, с периодом $2l$, распространяем на всю ось Ox . Эту процедуру иллюстрирует рис. 1.5.

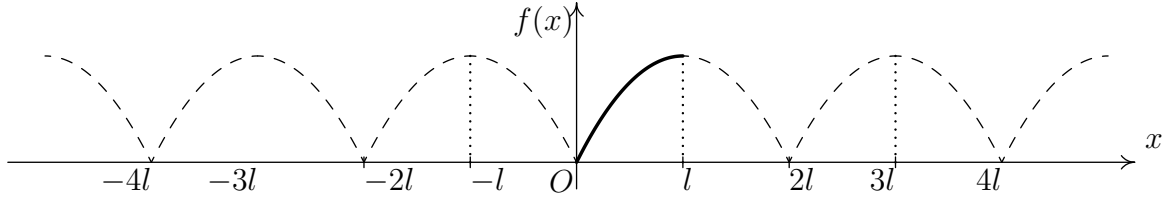


Рис. 1.5

Затем получаем ряд Фурье, содержащий только косинусы. Коэффициенты этого ряда вычисляются по формуле (1.31).

Пример 1.3. Разложить функцию $f(x) = x$:

- 1) в общий ряд Фурье в интервале $(0; 1)$;
- 2) в интервале $(0; 1)$ по косинусам кратных дуг;
- 3) в интервале $(0; 1)$ по синусам кратных дуг.

Построить графики сумм полученных рядов.

Решение.

1. Продолжим функцию $f(x) = x$, $x \in (0; 1)$ на всю числовую ось с периодом $2l = 1$, т. е. так, что $f(x) = f(x + 1)$ (рис. 1.6). Так как $l = \frac{1}{2}$, $\frac{\pi n}{l} = 2\pi n$, то из формул (1.33) находим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1; \quad a_n = 2 \int_0^1 x \cos 2\pi n x dx = 0; \quad b_n = 2 \int_0^1 x \sin 2\pi n x dx = -\frac{1}{\pi n}.$$

Запишем ряд Фурье:

$$f(x) \sim S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n}.$$

По признаку Дирихле

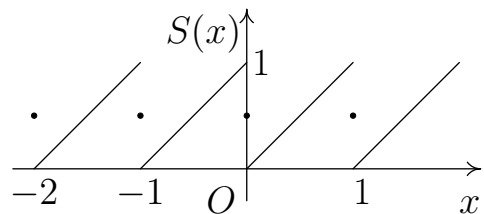


Рис. 1.6

$$S(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1); \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = 1, \end{cases}$$

$S(x+1) = S(x)$ (см. рис. 1.6).

2. Дополним определение функции $f(x) = x$, $x \in (0; 1)$ на интервал $(-1; 0)$ четным образом, приняв на нем $f(x) = -x$, $x \in (-1; 0)$. Тогда $f(x) = |x|$, $x \in (-1; 1)$. Продолжим полученную функцию с периодом $2l = 2$ на всю числовую ось, т. е. так, что $f(x + 2) = f(x)$. В результате получим четную периодическую функцию, ряд Фурье которой содержит только косинусы. Коэффициенты Фурье вычисляем по формулам (1.31) при $l = 1$:

$$b_n = 0, \quad a_0 = 2 \int_0^1 x \, dx = 1;$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos \pi n x \, dx = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

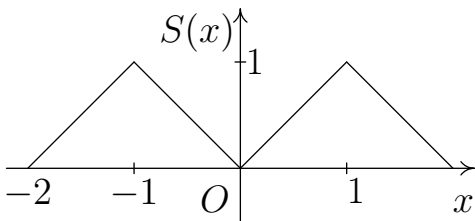


Рис. 1.7

Запишем ряд Фурье:

$$f(x) \sim S(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \pi(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

По признаку Дирихле $S(x) = |x|$ при $x \in [-1; 1]$ $S(x+2) = S(x)$ (рис. 1.7).

3. Доопределим функцию $f(x) = x$, $x \in (0; 1)$ на интервале $(-1; 0)$ нечетным образом, приняв на нем $f(x) = x$, $x \in (-1; 0)$. Тогда $f(x) = x$, $x \in (-1; 1)$.

Продолжив полученную функцию с периодом $2l = 2$ на всю числовую ось, получим нечетную периодическую функцию, ряд Фурье которой содержит только синусы. Коэффициенты Фурье вычисляем по формулам (1.32) при $l = 1$:

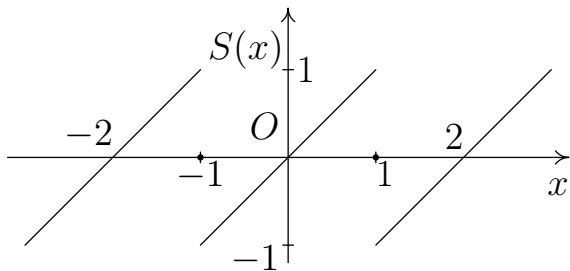


Рис. 1.8

$$f(x) \sim S(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \pi n x.$$

$$a_0 = a_n = 0,$$

$$b_0 = 2 \int_0^1 x \sin \pi n x \, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

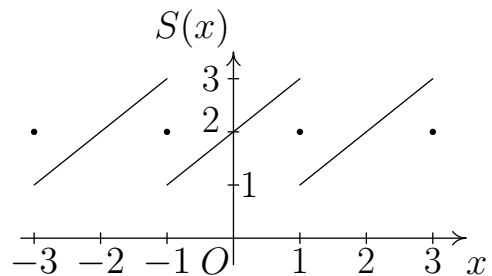
и получаем ряд Фурье:

По признаку Дирихле $S(x) = x$ при $x \in (-1; 1)$ $S(x+2) = S(x)$,
 $S(-1) = \frac{f(-1-0) + f(-1+0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$, $S(1) = \frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$
(рис. 1.8).

Пример 1.4. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье в интервале $(1; 3)$. Построить график суммы полученного ряда. Записать равенство Парсеваля – Стеклова и с его помощью вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Решение. Длина заданного промежутка равна 2. Значит, $l=1$, $\frac{\pi n}{l} = \pi n$. Вычислим коэффициенты Фурье по формулам (1.33):

$$a_0 = \int_1^3 x dx = 4; \quad a_n = \int_1^3 x \cos \pi n x dx = 0;$$



$$b_n = \int_1^3 x \sin \pi n x dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Рис. 1.9

Запишем ряд Фурье:

$$f(x) \sim S(x) = 2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi n x}{n}.$$

По признаку Дирихле

$$S(x) = \begin{cases} x, & x \in (1, 3), \\ 2, & x = 1, x = 3, \end{cases}$$

$S(x+2) = S(x)$ (рис. 1.9). Равенство Парсеваля – Стеклова

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3} = 8 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\frac{26}{3} - 8 \right) \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}$.

1.7. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-l; l]$. Составим для нее ряд Фурье (1.18) на интервале $(-l, l)$:

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (1.34)$$

Выразим $\cos \frac{n\pi x}{l}$ и $\sin \frac{n\pi x}{l}$ через показательные функции, воспользовавшись формулами Эйлера¹:

$$e^{\frac{\pi n x}{l} i} = \cos \frac{\pi n x}{l} + i \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (1.35)$$

$$e^{-\frac{\pi n x}{l} i} = \cos \frac{\pi n x}{l} - i \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (1.36)$$

Сложим почленно равенства (1.35) и (1.36), затем вычтем из выражения (1.35) равенство (1.36) и получим

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{\pi n x}{l} i} + e^{-\frac{\pi n x}{l} i}}{2}, \quad \sin \frac{n\pi x}{l} = -i \frac{e^{\frac{\pi n x}{l} i} - e^{-\frac{\pi n x}{l} i}}{2}. \quad (1.37)$$

Подставим выражения (1.37) в ряд Фурье и проведем преобразования:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{\frac{\pi n x}{l} i} + e^{-\frac{\pi n x}{l} i}}{2} - i b_n \frac{e^{\frac{\pi n x}{l} i} - e^{-\frac{\pi n x}{l} i}}{2} \right). \quad (1.38)$$

Сгруппировав члены, содержащие $e^{\frac{\pi n x}{l} i}$ и $e^{-\frac{\pi n x}{l} i}$, запишем

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - i b_n}{2} e^{\frac{\pi n x}{l} i} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-\frac{\pi n x}{l} i} \right). \quad (1.39)$$

Введем обозначения:

$$C_0 = \frac{a_0}{2}; \quad C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}; \quad C_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}. \quad (1.40)$$

Выразим коэффициенты C_n через интегралы (1.17) для a_n и b_n :

$$C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx - i \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (1.41)$$

¹Эйлер Леонард (1707–1783) – швейцарский математик, механик, физик и астроном.

Объединим интегралы и, принимая во внимание формулу Эйлера (1.35), запишем

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left(\cos \frac{\pi nx}{l} - i \sin \frac{\pi nx}{l} \right) dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{\pi nx}{l} i} dx. \quad (1.42)$$

Аналогично

$$C_{-n} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{\pi nx}{l} i} dx. \quad (1.43)$$

Тогда ряд Фурье (1.34) примет вид

$$f(x) \sim S(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n e^{\frac{n\pi x}{l} i} + C_{-n} e^{-\frac{n\pi x}{l} i} \right). \quad (1.44)$$

Формулы (1.41), (1.43) для вычисления комплексных коэффициентов Фурье C_n и C_{-n} можно объединить, так как одна из другой получается изменением знака перед n :

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{\pi nx}{l} i} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.45)$$

и окончательно ряд Фурье в комплексной форме запишем в более компактном виде:

$$f(x) \sim S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{n\pi x}{l} i}. \quad (1.46)$$

Из равенств (1.40) видим, что C_n и C_{-n} являются комплексными сопряженными числами, поэтому

$$|C_0|^2 = \frac{a_0^2}{4}, \quad |C_n|^2 = C_n C_{-n} = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2). \quad (1.47)$$

В формулах (1.17) для вычисления a_n и b_n номер n входит сомножителем только под знаком косинуса или синуса, поэтому a_n – четная относительно n функция, а b_n – нечетная. Следовательно, по формулам (1.47) $|C_n|^2$ – четная функция n . С учетом формул (1.47) равенство (1.22) перепишем в виде

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f^2(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (1.48)$$

Выражение (1.48) – это *формула Парсеваля для комплексной формы ряда Фурье*.

1.8. Спектральный анализ периодических сигналов

В радиотехнике разложение (1.46) имеет следующий вид:

$$f(x) \sim S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_n x}. \quad (1.49)$$

Определение 1.8. Величина A_n , равная $2C_n$, называется *комплексной амплитудой колебания* с частотой $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$:

$$A_n = 2C_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{\pi n x}{l} i} dx. \quad (1.50)$$

Из формул (1.47) следует

$$A_0 = a_0, \quad |A_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (1.51)$$

Определение 1.9. *Спектральной функцией*, или *спектральной плотностью* $S(i\omega_n)$ периодического сигнала $f(t)$, называется

$$S(i\omega_n) = \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_n t} dt = 2lC_n = l(a_n - ib_n). \quad (1.52)$$

Спектральная функция и комплексная амплитуда связаны зависимостью $A_n = \frac{1}{l} S(i\omega_n)$.

Определение 1.10. *Амплитудным спектром* $S(\omega_n)$ сигнала $f(t)$ называется множество значений модуля спектральной плотности

$$S(\omega_n) = |S(i\omega_n)| = \begin{cases} l\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & n \neq 0, \\ l|a_0|, & n = 0. \end{cases} \quad (1.53)$$

Определение 1.11. *Фазовым спектром* Φ_n сигнала $f(t)$ называется множество значений аргумента спектральной плотности $S(i\omega_n)$, взятых с противоположным знаком:

$$\Phi_n = -\arg S(i\omega_n), \quad -\pi < \Phi_n \leq \pi. \quad (1.54)$$

Поскольку

$$S(-i\omega_n) = \int_{-l}^l f(t) e^{i\omega_n t} dt = \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n t dt + i \int_{-l}^l f(t) \sin \omega_n t dt =$$

$$=l(a_n + ib_n) = \overline{S(i\omega_n)}, \quad (1.55)$$

то функции $S(i\omega_n)$ и $S(-i\omega_n)$ – комплексно сопряженные числа, значит,

$$\Phi_n = \arg S(-i\omega_n) = \arg \overline{S(i\omega_n)} = -\arg S(i\omega_n).$$

Черта сверху означает комплексное сопряжение.

Установим зависимость $f(t)$ от $|A_n|$, ω_n и Φ_n . Для этого умножим члены ряда Фурье (1.34) на $1 = \frac{|A_n|}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$:

$$f(t) \sim S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos \frac{n\pi t}{l} + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin \frac{n\pi t}{l} \right). \quad (1.56)$$

Поделив величину $\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ на $\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$, получим $\frac{b_n}{a_n} = \operatorname{tg} \Phi_n$, что следует из определения (1.54). Так как

$$\left| \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right| \leq 1 \text{ и } \left| \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right| \leq 1,$$

то принимаем $\cos \Phi_n = \frac{a_n}{|A_n|}$ и $\sin \Phi_n = \frac{b_n}{|A_n|}$.

Перепишем разложение (1.56) с учетом двух последних формул:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| (\cos \Phi_n \cos \omega_n t + \sin \Phi_n \sin \omega_n t).$$

С учетом формулы для косинуса разности двух углов окончательно получим

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \cos(\omega_n t - \Phi_n). \quad (1.57)$$

Здесь $|A_n|$ – амплитуда n -го гармонического колебания, $(\omega_n t - \Phi_n)$ – фаза этого колебания, Φ_n – его начальная фаза.

Отметим некоторые простейшие свойства спектральной функции, амплитудного и фазового спектров. Для четного по t сигнала $f(t)$ все коэффициенты $b_n = 0$. Поэтому из равенств (1.52) и (1.30) следует, что в этом случае

$$S(i\omega_n) = la_n = \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n t dt = 2 \int_0^l f(t) \cos \omega_n t dt. \quad (1.58)$$

Если $f(-t) = f(t)$, то спектральная функция является четной и действительной функцией номера n и частоты ω_n , ввиду четности a_n по n . Следовательно, и ее аргумент Φ_n тоже четная функция n , причем его возможные значения равны нулю или π .

При нечетном сигнале $f(t)$ все коэффициенты $a_n = 0$ и по формулам (1.52) и (1.30)

$$S(i\omega_n) = -ilb_n = -i \int_{-l}^l f(t) \sin \omega_n t dt = -2i \int_0^l f(t) \sin \omega_n t dt. \quad (1.59)$$

Если $f(-t) = -f(t)$, то $S(i\omega_n)$ – чисто мнимая величина и нечетная функция n и ω_n , а Φ_n принимает одно из возможных значений $\pm \frac{\pi}{2}$ и является нечетной функцией n и ω_n .

Поскольку $S(i\omega_n)$ и $S(-i\omega_n)$ – комплексные сопряженные числа, то $\arg S(-i\omega_n) = -\arg S(i\omega_n)$ и для всех сигналов, не являющихся четными, фазовый спектр – нечетная функция номера n и частоты ω_n . Коэффициенты Фурье a_n – всегда четные функции номера n , а коэффициенты b_n – нечетные. Это следует из формул (1.17), поэтому амплитудный спектр по определению (1.53) – всегда четная функция номера n и частоты ω_n , т. е. $S(\omega_n) = S(-\omega_n)$.

В радиотехнике интеграл в левой части (1.48) называется *средней за период $2l$ мощностью P* , рассеиваемой периодическим сигналом $f(t)$ на сопротивлении 1 Ом:

$$P = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right). \quad (1.60)$$

Пример 1.5. Разложить в комплексные ряды Фурье периодические функции:

- 1) $f(x) = x$, $x \in (-1; 1)$, $f(x+2) = f(x)$;
- 2) $f(x) = e^x$, $x \in (-\pi; \pi)$, $f(x+2\pi) = f(x)$;
- 3) функция задана графически на рис. 1.10.

Для каждой функции найти спектральную плотность, амплитудный и фазовый спектры и построить их графики.

Решение.

1. Период равен 2, значит, $l = 1$. Вычислим комплексные коэффициенты C_n . Частота $\omega_n = \pi n$. Так как $f(x) = x$ – нечетная функция, то

C_n должны быть чисто мнимыми величинами. При $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-\omega_n t i} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t e^{-\omega_n t i}}{-\omega_n i} + \frac{e^{-\omega_n t i}}{\omega_n^2} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= -\frac{e^{\omega_n i} + e^{-\omega_n i}}{2\omega_n i} = \frac{i}{\omega_n} \cos \omega_n = \frac{(-1)^n i}{\omega_n}.$$

При $n=0$ коэффициент $C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = 0$. Запишем комплексный ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n i}{\pi n} e^{\omega_n x i}, \quad n \neq 0.$$

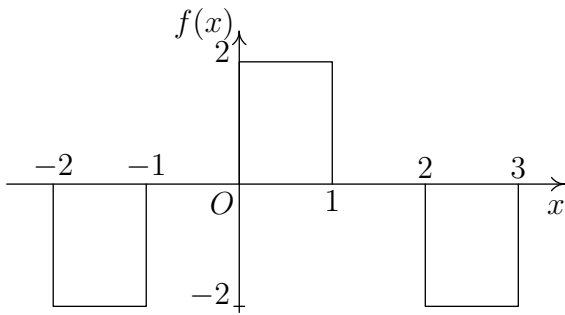


Рис. 1.10

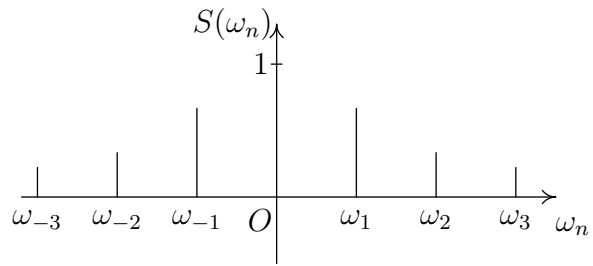


Рис. 1.11

Спектральная плотность

$$S(i\omega_n) = 2C_n = \frac{2(-1)^n i}{\pi n} = \frac{2(-1)^n i}{\omega_n}.$$

Амплитудный спектр (его график приведен на рис. 1.11)

$$S(\omega_n) = |S(i\omega_n)| = \frac{2}{|\omega_n|}.$$

Фазовый спектр $\Phi_n = -\arg \frac{2(-1)^n i}{\omega_n} = \arg \frac{2(-1)^{n+1} i}{\omega_n}$ является нечетной функцией от номера n , поэтому достаточно найти его значения при $n \geq 0$. Поскольку $S(i\omega_n)$ — чисто мнимая величина, то Φ_n имеет лишь два значения: $\pm \frac{\pi}{2}$, выражаемые формулой $\Phi_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2}$. Фазовый спектр Φ_n не определен, если $n=0$, так как аргумент 0 не существует. График фазового спектра Φ_n изображен на рис. 1.12.

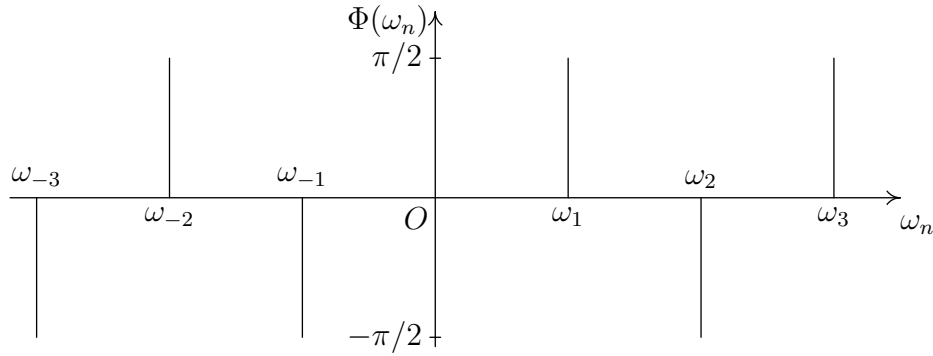


Рис. 1.12

2. Период функции равен 2π , $l = \pi$, а частота $\omega_n = n$. Вычислим комплексные коэффициенты C_n :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-nti} dt = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{(1-ni)t}}{1-ni} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi} e^{-\pi ni} - e^{-\pi} e^{\pi ni}}{2\pi(1-ni)} = \\ &= \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi(1-ni)} = \frac{(-1)^n \operatorname{sh} \pi}{\pi(1-ni)} = \frac{(-1)^n (1+ni) \operatorname{sh} \pi}{\pi(1+n^2)}. \end{aligned}$$

Запишем комплексный ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+ni)}{1+n^2} e^{nxi}.$$

Спектральная плотность

$$S(in) = 2lC_n = \frac{2(-1)^n (1+ni)}{1+n^2} \operatorname{sh} \pi.$$

Амплитудный спектр

$$S(n) = |S(in)| = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Фазовый спектр

$$\Phi_n = -\arg(-1)^n (1+ni).$$

Для построения амплитудного (рис. 1.13) и фазового (рис. 1.14) спектров составим табл. 1.1. Так как Φ_n – нечетная функция, а $S(n)$ – четная по n , то рассмотрим только $n \geq 0$.

Таблица 1.1

$\omega_n = n$	0	1	2	3	4
$S(n)$	23.1	16.3	10.3	7.29	5.6
Φ_n	0	0.75π	-0.35π	0.6π	-0.42π

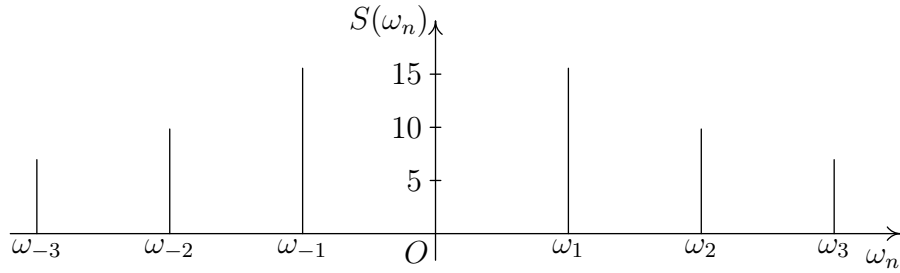


Рис. 1.13

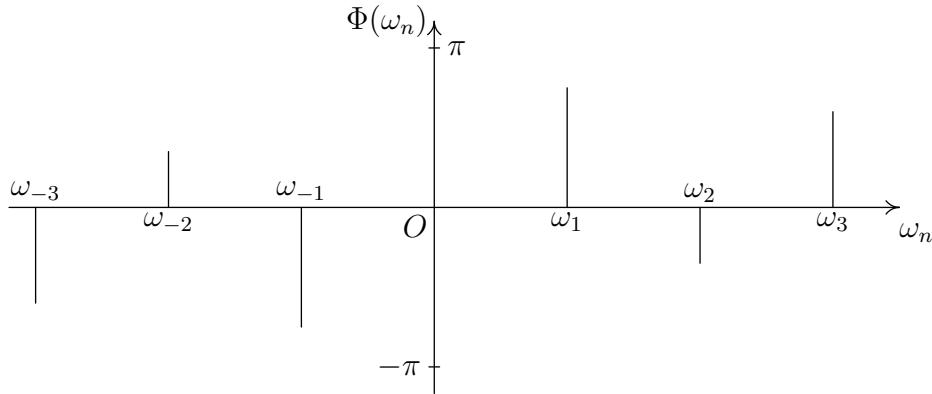


Рис. 1.14

3. Период функции равен 4, $l=2$, а частота $\omega_n = \frac{\pi n}{2}$. Вычислим комплексные коэффициенты C_n :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{4} \left(\int_0^1 2e^{-\omega_n t i} dt - \int_2^3 2e^{-\omega_n t i} dt \right) = \frac{e^{-\omega_n i} - 1 - e^{-3\omega_n i} + e^{-2\omega_n i}}{-2\omega_n i} = \\ &= \frac{(1 - e^{-\omega_n i})(1 - e^{-2\omega_n i})}{2\omega_n i} = \frac{(1 - e^{-\frac{n\pi}{2} i})(1 - e^{-\pi n i})}{\pi n i} = \frac{(1 - e^{-\frac{n\pi}{2} i})(1 - (-1)^n)}{\pi n i}. \end{aligned}$$

Если $n=2m$ – четное число, то $C_{2m}=0$, $m=\pm 1, \pm 2, \dots$. Если $n=2m-1$ – нечетное число, то по формуле (1.36)

$$\begin{aligned} C_{2m-1} &= \frac{2(1 - e^{-\frac{\pi(2m-1)}{2} i})}{\pi(2m-1)i} = \frac{2(1 - \cos(-\pi m + \frac{\pi}{2}) + i \sin(-\pi m + \frac{\pi}{2}))}{\pi(2m-1)i} = \\ &= \frac{2(1 - i \cos \pi m)}{\pi(2m-1)i} = \frac{-2i(1 - i \cos \pi m)}{\pi(2m-1)} = \frac{2((-1)^{m+1} - i)}{\pi(2m-1)}, \end{aligned}$$

$$C_0 = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 2 dt - \int_2^3 2 dt \right) = 0.$$

Запишем комплексный ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} - i}{2m-1} e^{\frac{\pi(2m-1)}{2}xi}.$$

Спектральная плотность

$$S(i\omega_n) = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{8((-1)^{m+1} - i)}{\pi(2m-1)}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Амплитудный спектр

$$S(\omega_n) = |S(i\omega_n)| = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{8\sqrt{2}}{\pi|2m-1|}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Фазовый спектр

$$\Phi_n = \begin{cases} \text{не определен,} & n = 2m, \\ -\arg \frac{(-1)^{m+1} - i}{2m-1}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Для построения амплитудного (рис. 1.15) и фазового (рис. 1.16) спектров составим табл. 1.2.

Таблица 1.2

m	-2	-1	0	1	2	3
$n=2m-1$	-5	-3	-1	1	3	5
$S(\omega_n)$	0.72	1.2	3.6	3.6	1.2	0.72
Φ_n	$-\pi/4$	$-3\pi/4$	$-\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$

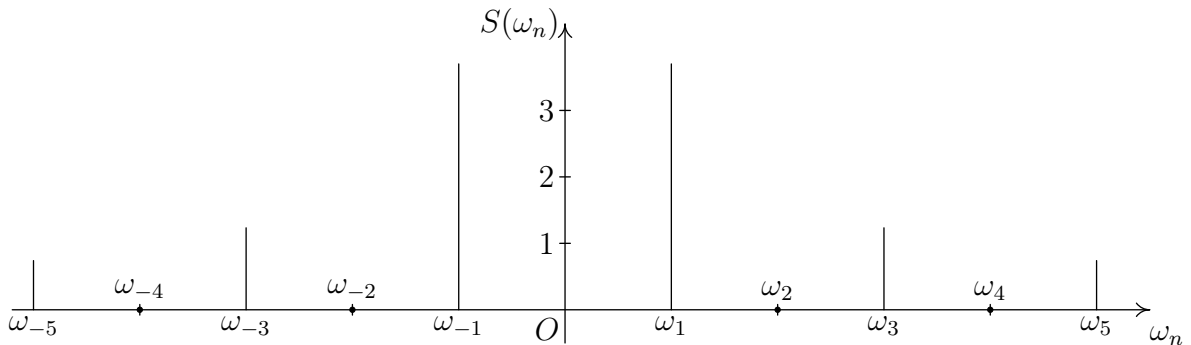


Рис. 1.15

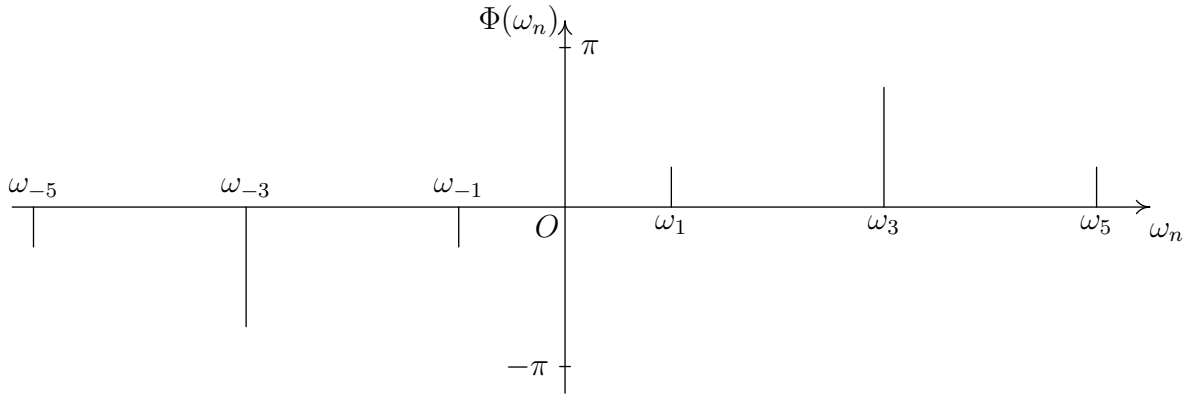


Рис. 1.16

Пример 1.6. Сигнал представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов, изображенных на рис. 1.17. Вычислить среднюю мощность переменной составляющей этого сигнала.

Решение. Согласно формуле (1.60) средняя мощность P сигнала $f(t)$ за период T

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} U_0^2 dt = \frac{U_0^2 T_0}{T}.$$

Постоянная составляющая сигнала

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} U_0 dt = \frac{2U_0 T_0}{T}.$$

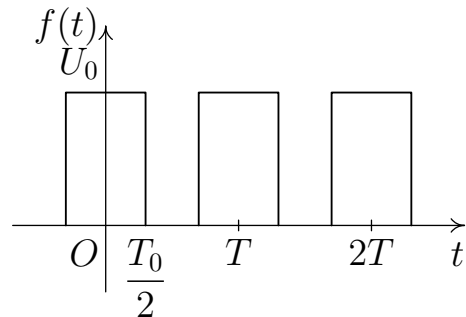


Рис. 1.17

Мощность постоянной составляющей $\frac{a_0^2}{4} = \frac{U_0^2 T_0^2}{T^2}$. Поэтому мощность переменной составляющей этого сигнала

$$P_{\text{п}} = P - \frac{a_0^2}{4} = \frac{U_0^2 T_0}{T} - \frac{U_0^2 T_0^2}{T^2} = \frac{U_0^2 T_0 (T - T_0)}{T^2}.$$

1.9. Интеграл Дирихле. Принцип локализации

Запишем ряд Фурье для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l = 2\pi$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.61)$$

Исследуем сходимость этого ряда в заданной точке $x = x_0$ к значению $f(x)$ в этой точке. Запишем частичную сумму ряда Фурье в точке x_0 :

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0). \quad (1.62)$$

Подставим в формулу (1.62) вместо a_k и b_k их интегральные представления (1.17), внесем постоянные $\cos kx_0$ и $\sin kx_0$ под знаки интегралов и объединим их:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kx \cos kx_0 + \sin kx \sin kx_0) \right] dx.$$

В круглых скобках стоит косинус разности, поэтому

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x - x_0) \right] dx. \quad (1.63)$$

Так как $f(x) = f(x + 2\pi)$, то по равенству (1.19) интеграл в формуле (1.63) сохраняет свое значение на любом отрезке интегрирования длины 2π , поэтому

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f(x) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x - x_0) \right] dx. \quad (1.64)$$

В интеграле (1.64) выполним замену переменной интегрирования: $x - x_0 = t$, $dx = dt$:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right] dt. \quad (1.65)$$

Все члены в квадратных скобках в равенстве (1.65) умножим и разделим на $\sin \frac{t}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{t}{2} \cos kt \right).$$

Так как $2 \sin \frac{t}{2} \cos kt = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t$, то

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left\{ \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left\{ \sin \frac{t}{2} + \left[\sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right] + \left[\sin \frac{5t}{2} - \sin \frac{3t}{2} \right] + \cdots + \right. \\ \left. + \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) t \right] \right\}.$$

В фигурных скобках взаимно уничтожаются все члены, кроме $\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t$, поэтому

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}. \quad (1.66)$$

Подставив равенство (1.66) в формулу (1.65), получим

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (1.67)$$

Это представление $S_n(x_0)$ и различные его модификации называются *интегралом Дирихле*. Из выражения (1.67) нельзя найти $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, так как при $n \rightarrow \infty$ предел подынтегральной функции не существует. Разделим обе части равенства (1.66) на π , а затем проинтегрируем его по t от $-\pi$ до π . Интеграл от левой части в полученной формуле

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = 1,$$

поэтому интеграл от правой части

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = 1. \quad (1.68)$$

Умножим обе части равенства (1.68) на $f(x_0)$ и вычтем почленно из формулы (1.67), получим

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0 + t) - f(x_0)) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (1.69)$$

Таким образом, вопрос о сходимости последовательности $S_n(x_0)$ к $f(x_0)$ сведен к задаче о стремлении к нулю интеграла в уравнении (1.69) при $n \rightarrow \infty$.

Так как $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t = \sin nt \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} \cos nt$, то интеграл в соотношении (1.69) можно разбить на два интеграла, обозначив в нем $f(x_0 + t) - f(x_0) = F(t)$:

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} F(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} \frac{1}{2} F(t) \cos nt \, dt. \quad (1.70)$$

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ в обеих частях уравнения (1.70), разбив первый интеграл в правой части на три интеграла:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) - f(x_0) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{2} F(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{2} F(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt \right] + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2} F(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} F(t) \cos nt \, dt. \quad (1.71) \end{aligned}$$

Последний интеграл в равенстве (1.71) — это коэффициент Фурье a_n для функции $\frac{1}{2}F(t)$, поэтому по формуле (1.23) его предел при $n \rightarrow \infty$ равен 0. Функция $\frac{1}{2}F(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$ является ограниченной и кусочно-непрерывной на промежутках $-\pi \leq t \leq -\delta$, $\delta \leq t \leq \pi$, поэтому по пределу (1.26) пределы интегралов в квадратных скобках в уравнении (1.71) при $n \rightarrow \infty$ равны нулю.

Таким образом, для остатка ряда Фурье получили выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) - f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2} F(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt. \quad (1.72)$$

Интегрирование в формуле (1.72) производится по отрезку $-\delta \leq t \leq \delta$, а так как $F(t) = f(x_0 + t) - f(x_0)$, то интеграл зависит только от значений функции $f(x)$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Это и доказывает принцип локализации: *поведение ряда Фурье функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 зависит только от значений функции $f(x)$, принимаемых в сколь угодно малой окрестности x_0* . При этом значения $f(x)$ вне интервала $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ не играют роли. Таким образом, если взять две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, значения которых в произвольно малой окрестности точки x_0 совпадают, то как бы они ни различались вне

этой окрестности, соответствующие ряды Фурье ведут себя в точке x_0 одинаково: либо оба сходятся к одной и той же сумме, либо оба расходятся. Следует отметить, что коэффициенты Фурье для $f_1(x)$ и $f_2(x)$, зависящие от всех значений этих функций на отрезке $[-\pi; \pi]$, могут быть совершенно различными.

1.10. Поведение рядов Фурье вблизи точек разрыва. Явление Гиббса

Непрерывность функции является необходимым условием равномерной сходимости ее ряда Фурье. Исследуем поведение частичных сумм ряда Фурье на примере периодической, с периодом 2π , абсолютно интегрируемой функции $f(x)$, имеющей точки разрыва первого рода при $x = k\pi$, где k – целое число:

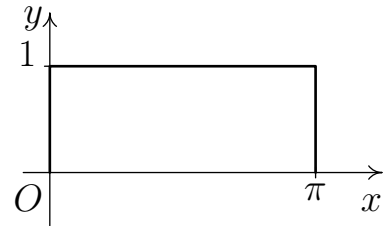


Рис. 1.18

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Составим для функции $f(x)$ ряд Фурье и его частичную сумму:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad (1.73)$$

$$S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}. \quad (1.74)$$

Поскольку $\int_0^x \cos(2k-1)t \, dt = \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$, то, подставив это выражение в равенство (1.74), запишем

$$S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)t \, dt. \quad (1.75)$$

Рассуждая так же, как и при выводе формулы (1.66), можно показать, что

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)t = \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}. \quad (1.76)$$

Подставив формулу (1.76) в (1.75), получим

$$S_{2n-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt. \quad (1.77)$$

Дважды продифференцируем частичную сумму в равенстве (1.77):

$$S'_{2n-1}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x}, \quad (1.78)$$

$$S''_{2n-1}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{2n \cos 2nx \sin x - \sin 2nx \cos x}{\sin^2 x}. \quad (1.79)$$

Производная $S'_{2n-1}(x)$ равна нулю в точках $x_m = \frac{m\pi}{2n}$, $m = 1, 2, \dots, (2n-1)$. Вторая производная в точках x_m

$$S''_{2n-1}\left(\frac{m\pi}{2n}\right) = \frac{2n(-1)^m}{\pi \sin \frac{m\pi}{2n}}. \quad (1.80)$$

Знак $S''_{2n-1}\left(\frac{m\pi}{2n}\right)$ совпадает со знаком $(-1)^m$. При нечетных m точки $x_{2k-1} = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, 2, \dots, n$ являются точками максимума для $S_{2n-1}(x)$. При четных m точки $x_{2k} = \frac{\pi}{k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ являются точками минимума для $S_{2n-1}(x)$.

Запишем частичную сумму $S_{2n-1}(x)$ в точке максимума $x_1 = \frac{\pi}{2n}$:

$$S_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt. \quad (1.81)$$

При увеличении n точка максимума x_1 смещается к точке $x=0$ (рис. 1.19–1.21). В интеграле (1.81) заменим переменную интегрирования по формулам $\xi = 2nt$, $t = \frac{\xi}{2n}$, $dt = \frac{d\xi}{2n}$ и перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} \cdot \frac{\frac{\xi}{2n}}{\sin \frac{\xi}{2n}} d\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\xi}{2n}}{\sin \frac{\xi}{2n}} d\xi \right).$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{\xi}{2n}}{\sin \frac{\xi}{2n}} \right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\xi}{2n}}{\frac{\xi}{2n}} \right)} = 1,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \left(\frac{\pi}{2n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi. \quad (1.82)$$

Численное интегрирование в равенстве (1.82) дает значение интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = 0,5089.$$

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} S \left(\frac{\pi}{2n} \right) = 1,089 > 1$.

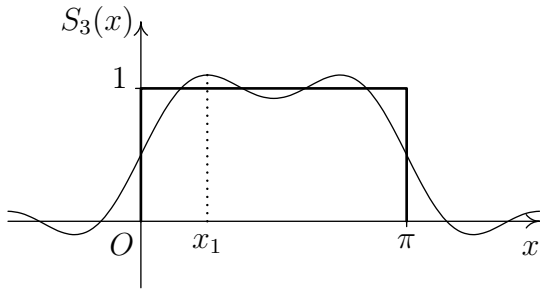


Рис. 1.19

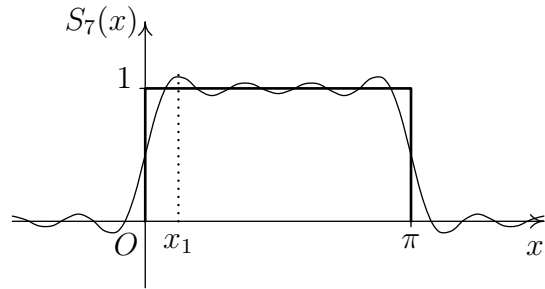


Рис. 1.20

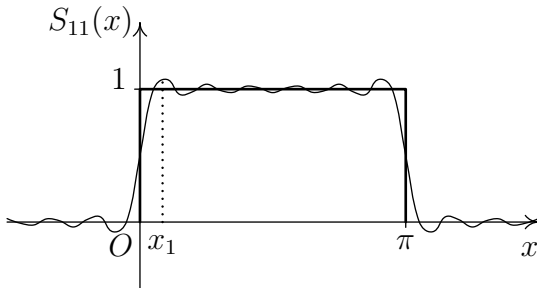


Рис. 1.21

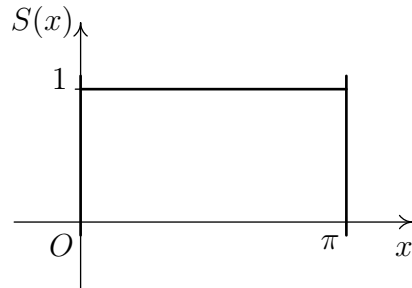


Рис. 1.22

Таким образом, вблизи разрыва $x=0$ сумма (1.74) конечного числа членов ряда Фурье заметно превышает нужное значение. Когда число слагаемых в S_{2n-1} возрастает, максимум не исчезает, а придвигается ближе к точке разрыва, что отражено на рис. 1.19–1.21. Аналогичная картина имеет место и вблизи точки $x=\pi$ при приближении к ней слева.

Можно сказать, что предельным геометрическим образом при $n \rightarrow \infty$ для кривых $S_{2n-1}(x)$ является не ломаная на рис. 1.18, а ломаная на рис. 1.22. Этот дефект сходимости впервые был отмечен Гиббсом¹ на частном примере и известен под названием "явление Гиббса". То, что

¹Гиббс Джозайя Уиллард (1839–1903) – американский физик-теоретик.

верно для рассматриваемой функции $f(x)$, очевидно, верно и для более общих функций, поскольку разрыв можно рассматривать как результат сложения прямоугольной волны с главной функцией. Явление Гиббса – это предупреждение против прямого использования рядов Фурье в вычислениях, если только коэффициенты не убывают хотя бы как n^{-3} .

1.11. Интегрирование рядов Фурье

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.83)$$

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt, \quad x \in [-\pi; \pi]. \quad (1.84)$$

Так как ряд Фурье для $f(x)$ существует, то функция $F(x)$ непрерывная, ограниченная и периодическая с периодом 2π . Действительно,

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_0^{\pi} f(t) dt - \frac{a_0\pi}{2} - \int_0^{-\pi} f(t) dt - \frac{a_0\pi}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - a_0\pi.$$

Однако $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = a_0\pi$, поэтому $F(\pi) - F(-\pi) = 0$.

Функция $F(x)$ непрерывна, значит, она имеет сходящийся ряд Фурье на отрезке $[-\pi; \pi]$:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx). \quad (1.85)$$

Установим связь между коэффициентами рядов Фурье (1.83) и (1.85). Подставим $F(x)$ из равенства (1.84) в подынтегральные выражения формул (1.17), проинтегрируем по частям и получим A_n и B_n :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi n} \left[F(x) \sin xn \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \sin xn dx \right].$$

Так как $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$, а $\sin(\pm\pi n) = 0$, то

$$A_n = -\frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \sin nx \, dx = -\frac{b_n}{n}. \quad (1.86)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi n} \left[-F(x) \cos xn \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \cos xn \, dx \right]. \quad (1.87)$$

Поскольку $F(-\pi) = F(\pi)$, то

$$B_n = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \cos nx \, dx = \frac{a_n}{n}. \quad (1.88)$$

Чтобы найти A_0 , подставим в формулу (1.85) $x=0$:

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

По определению (1.84) $F(0) = 0$, поэтому с учетом формулы (1.86) найдем

$$\frac{A_0}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}. \quad (1.89)$$

Подставив найденные $\frac{A_0}{2}$, A_n и B_n в ряд (1.85), получим

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx + b_n(1 - \cos nx)). \quad (1.90)$$

Ряд (1.90) для функции $F(x)$ получается из ряда (1.83) почленным интегрированием. Таким образом, *почленное интегрирование ряда Фурье всегда допустимо, причем без всяких предположений о сходимости самого ряда.*

1.12. Дифференцирование рядов Фурье

Рассмотрим функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[-\pi; \pi]$, принимающую на его концах одинаковые значения $f(-\pi) = f(\pi)$ и имеющую кусочно-непрерывную производную $f'(x)$. Тогда

$$f(x) = \int_0^x f'(x) \, dx + f(0) \quad (1.91)$$

и ряд Фурье для $f(x)$ получается из ряда функции $f'(x)$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx) \quad (1.92)$$

почленным интегрированием (см. параграф 1.11).

Коэффициент a'_0 в ряду (1.92) равен нулю:

$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0. \quad (1.93)$$

Таким образом, ряд (1.92) для $f'(x)$ получается из ряда (1.83) почленным дифференцированием. Следует обратить внимание на ту роль, которую играет предположение о периодичности функции $f(x)$.

При нарушении этого условия свободный член $\frac{a'_0}{2}$ ряда Фурье для функции $f'(x)$ был бы отличен от нуля и, следовательно, ряд (1.92) не мог быть получен из ряда (1.83) почленным дифференцированием.

Отметим, что при дифференцировании функций $\cos nx$ и $\sin nx$ появляются натуральные множители n , повышающие порядок малости коэффициентов, что ухудшает шансы на сходимость ряда (1.92).

1.13. Умножение рядов Фурье

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ интегрируемы с квадратом на отрезке $[-\pi; \pi]$ и для них известны ряды Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.94)$$

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx). \quad (1.95)$$

Составим ряд Фурье для произведения $f(x)F(x)$. Это возможно: так как $f(x)$ и $F(x)$ интегрируемы с квадратом, то произведение $f(x)F(x)$ – заведомо интегрируемая функция и, следовательно, она имеет ряд Фурье

$$f(x)F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx). \quad (1.96)$$

Выразим коэффициенты α_n , β_n ряда (1.96) через коэффициенты a_n , b_n , A_n , B_n . Для этого запишем равенство Парсеваля – Стеклова для

функций $f(x) + F(x)$ и $f(x) - F(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + F(x))^2 dx = \frac{(a_0 + A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + A_n)^2 + (b_n + B_n)^2), \quad (1.97)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 dx = \frac{(a_0 - A_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_n - A_n)^2 + (b_n - B_n)^2). \quad (1.98)$$

Вычтем почленно из равенства (1.97) равенство (1.98), с учетом тождества

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

получим

$$\frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x) dx = \frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n). \quad (1.99)$$

Определение коэффициентов α_n и β_n сводится к использованию выведенной формулы (1.99):

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F(x) \cos kx dx.$$

Это выражение отличается от $\frac{\alpha_0}{2}$ тем, что функция $F(x)$ в формуле (1.99) заменена на функцию $F(x) \cos nx$, коэффициенты Фурье которой выражаются интегралами

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \cos nx dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) (\cos(n+k)x + \cos(n-k)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} (A_{n+k} + A_{n-k}), \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \sin nx dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) (\sin(n+k)x + \sin(n-k)x) dx = \\ &= \frac{1}{2} (B_{n+k} + B_{n-k}). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Формулы (1.100) и (1.101) годны не только для $n \geq k$, но и для $n < k$, если условиться, что $A_{-n} = A_n$, $B_{-n} = -B_n$. Теперь по формуле

(1.99) находим

$$\alpha_k = a_0 A_k + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (A_{n+k} + A_{n-k}) + b_n (B_{n+k} + B_{n-k})). \quad (1.102)$$

Аналогично для β_k получаем

$$\beta_k = a_0 B_k + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (B_{n+k} - B_{n-k}) - b_n (A_{n+k} - A_{n-k})). \quad (1.103)$$

Формулы (1.99), (1.102), (1.103) дают решение задачи о составлении ряда Фурье для произведения $f(x)F(x)$, если известны коэффициенты Фурье сомножителей.

1.14. Интеграл Фурье

Сформулируем теорему.

Теорема 1.6. Если функция $f(x)$ на любом конечном интервале оси OX кусочно-непрерывна и абсолютно интегрируема на действительной оси, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = p < \infty$, то она может быть представлена интегралом Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt. \quad (1.104)$$

В точках разрыва x_i функции $f(x)$ этот интеграл сходится к среднему арифметическому пределов справа и слева, т. е. к числу $\frac{f(x_i+0) + f(x_i-0)}{2}$.

Формула (1.104) служит для разложения непериодического сигнала на гармонические колебания, частоты ω которых пробегают непрерывную совокупность значений $0 \leq \omega < \infty$.

Запишем интеграл Фурье (1.104) в другом виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega x \cos \omega t + \sin \omega x \sin \omega t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega x d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (1.105)$$

Тогда

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega. \quad (1.106)$$

Формулу (1.106) можно рассматривать как предельную форму ряда Фурье для функций, имеющих период $2l$, когда $l \rightarrow \infty$. При этом $a(\omega)$ и $b(\omega)$ аналогичны коэффициентам Фурье функции $f(x)$.

Если $f(x)$ – четная функция, то

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad b(\omega) = 0;$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (1.107)$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$a(\omega) = 0; \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt;$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega x d\omega \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (1.108)$$

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $(0, \infty)$, то ее можно продолжить четным или нечетным образом для $x < 0$ и представить интегралом Фурье с помощью равенств (1.107) или (1.108) соответственно.

Определение 1.12. Интеграл $F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$ называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(t)$.

Определение 1.13. Интеграл $F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$ называется синус-преобразованием Фурье функции $f(t)$.

Если функция $f(x)$ четная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega. \quad (1.109)$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega. \quad (1.110)$$

Выражения (1.109) и (1.110) называются соответственно *обратными косинус- и синус-преобразованиями Фурье*.

Пример 1.7. Представить функцию $f(x) = e^{-x}$ ($x > 0$) интегралом Фурье, продолжив ее: 1) четным образом; 2) нечетным образом.

Решение.

1. Продолжив функцию четным образом, найдем косинус-преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cos \omega t dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}(e^{\omega t i} + e^{-\omega t i})}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{-t(1-\omega i)}}{\omega i - 1} + \frac{e^{-t(1+\omega i)}}{-(\omega i + 1)} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\omega i} + \frac{1}{1+\omega i} \right) = \frac{1}{1+\omega^2}. \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+\omega^2} d\omega.$$

2. Продолжив функцию нечетным образом, найдем синус-преобразование Фурье:

$$F_s(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t} \sin \omega t dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}(e^{\omega t i} - e^{-\omega t i})}{2i} dt =$$

$$= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{-t(1-\omega i)}}{\omega i - 1} + \frac{e^{-t(1+\omega i)}}{\omega i + 1} \right) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1-\omega i} - \frac{1}{1+\omega i} \right) = \frac{\omega}{(1+\omega^2)}.$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{1+\omega^2} d\omega.$$

Пример 1.8. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} A_0, & \text{при } 0 < x < a, \\ 0, & \text{при } a < x < \infty, \end{cases}$$

продолжив ее: 1) нечетным образом; 2) четным образом. Вычислить ин-

теграл $\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$.

Решение.

1. Продолжив функцию нечетным образом, получим

$$f(x) = \frac{2A_0}{\pi} \int_0^\infty \sin \omega x d\omega \int_0^a \sin \omega t dt =$$

$$= \frac{2A_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega x (1 - \cos \omega a)}{\omega} d\omega = \begin{cases} A_0, & 0 < x < a, \\ -A_0, & -a < x < 0, \\ 0, & x = 0, |x| > a. \end{cases}$$

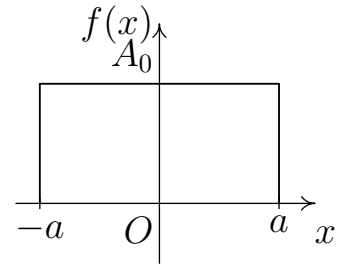


Рис. 1.23

2. В силу формулы (1.107)

$$f(x) = \frac{2A_0}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega x d\omega \int_0^a \cos \omega t dt = \frac{2A_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega x \sin \omega a}{\omega} d\omega = \begin{cases} A_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

При $a = 1$ $f(0) = A_0$, так как функция продолжена четным образом (рис. 1.23):

$$f(0) = A_0 = \frac{2A_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

1.15. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

Запишем интеграл Фурье (1.104):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt.$$

Функция $\Phi(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt$, т. е. внутренний интеграл, является четной функцией относительно ω ввиду четности косинуса, а поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt. \quad (1.111)$$

Далее, из абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ следует, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt$ существует и является нечетной функцией ω . Поэтому

$$\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt \right) d\omega = 0, \quad (1.112)$$

если здесь интеграл понимается в смысле главного значения, т. е. как $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a$.

Вычитая равенство (1.112) из равенства (1.111), получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega(t-x) - i \sin \omega(t-x)) dt \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt d\omega. \end{aligned}$$

Равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega \quad (1.113)$$

будем называть *интегралом Фурье в комплексной форме*.

Определение 1.14. Внутренний интеграл в формуле (1.113)

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.114)$$

назовем *преобразованием*, или *изображением Фурье* функции $f(x)$. Операцию вычисления преобразования Фурье будем обозначать $\hat{F}[f(t)] = F(i\omega)$.

Перепишем формулу (1.113) в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega x} d\omega = \hat{F}^{-1}[F(i\omega)]. \quad (1.115)$$

Определение 1.15. Выражение (1.115) называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается символом \hat{F}^{-1} .

Формула (1.114) имеет смысл для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x)$.

Свойства преобразования Фурье:

1. Линейность:

$$\hat{F}[af_1 + bf_2] = a\hat{F}[f_1] + b\hat{F}[f_2], \quad (1.116)$$

где a, b – константы.

2. Теорема запаздывания

$$\hat{F}[f(t - \tau)] = e^{-i\omega\tau} F(i\omega). \quad (1.117)$$

3. Теорема подобия

$$\hat{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(i\frac{\omega}{a}\right). \quad (1.118)$$

В частности, при $a = -1$

$$\hat{F}[f(-t)] = F(-i\omega). \quad (1.119)$$

4. Теорема о модуляции:

$$\hat{F}[f(t)e^{iat}] = F[i(\omega - a)], \quad (1.120)$$

$$\hat{F}[f(t) \cos at] = \frac{1}{2}F[i(\omega - a)] + \frac{1}{2}F[i(\omega + a)], \quad (1.121)$$

$$\hat{F}[f(t) \sin at] = \frac{i}{2}F[i(\omega + a)] - \frac{i}{2}F[i(\omega - a)]. \quad (1.122)$$

5. Преобразование производной:

$$\hat{F} \left[\frac{df}{dt} \right] = i\omega F(i\omega); \quad \hat{F} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = (i\omega)^n F(i\omega). \quad (1.123)$$

6. Дифференцирование изображения:

$$\hat{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(i\omega). \quad (1.124)$$

Доказательство

1. Поскольку преобразование Фурье (1.114) – это интеграл, то ему присуще свойство линейности.

2. Найдем преобразование Фурье функции $f(t-\tau)$ по определению (1.114):

$$\hat{F}[f(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-i\omega t} dt.$$

Введем новую переменную интегрирования $s = t - \tau$, $t = s + \tau$, $dt = ds$. Тогда

$$\hat{F}[f(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega(s+\tau)} ds = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds = e^{-i\omega\tau} F(i\omega).$$

3. Пусть $a > 0$. По определению (1.114)

$$\hat{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt.$$

Обозначим $s = at$, $t = \frac{s}{a}$, $dt = \frac{1}{a} ds$. Тогда

$$\hat{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega \frac{s}{a}} ds = \frac{1}{a} F\left(i\frac{\omega}{a}\right). \quad (1.125)$$

Возьмем $a < 0$. Тогда

$$\hat{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega \frac{s}{a}} ds = -\frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(s) e^{-i\omega \frac{s}{a}} ds = -\frac{1}{a} F\left(i\frac{\omega}{a}\right). \quad (1.126)$$

Так как при $a < 0$ модуль $|a| = -a$, то формулы (1.125) и (1.126) легко объединить и записать в виде формулы (1.118).

4. По определению (1.114)

$$\hat{F}[f(t)e^{iat}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(a-\omega)t} dt = F[i(\omega - a)].$$

Формулы (1.121), (1.122) следуют из теоремы о модуляции (1.120), если $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ выразить через экспоненты по формулам (1.37).

5. Если $\frac{df}{dt}$, ..., $\frac{d^n f}{dt^n}$ – абсолютно интегрируемые функции, то формулы (1.123) получают из определения (1.114) при подстановке в него производных и интегрирования по частям с учетом того, что абсолютно интегрируемые функции стремятся к нулю на бесконечности.

6. Пусть $f(t)$, $tf(t)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси. Продифференцируем интеграл (1.114) по ω :

$$\frac{dF(i\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (1.127)$$

Интеграл в правой части равенства (1.127) сходится равномерно по ω вследствие абсолютной интегрируемости $tf(t)$, а значит, $\frac{dF(i\omega)}{d\omega}$ существует и имеет место выражение (1.127). Если $f(t)$ такова, что $tf(t)$, $t^2f(t)$, ..., $t^n f(t)$ абсолютно интегрируемы, то, рассуждая аналогично, получим

$$\frac{d^n F(i\omega)}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^n f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

откуда и следует равенство (1.124).

1.16. Преобразование Фурье и свертка функций

Определение 1.16. Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – интегрируемые на всей прямой функции. Функция

$$f(t) = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t - \tau) d\tau \quad (1.128)$$

называется *сверткой функций* $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Операция свертки обозначается знаком "звездочка" (*).

Операция свертки коммутативна, т. е.

$$f_2 * f_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = f_1 * f_2. \quad (1.129)$$

Если $\hat{F}[f_1] = F_1(i\omega)$, $\hat{F}[f_2] = F_2(i\omega)$, то имеет место равенство

$$\hat{F}[f_1 * f_2] = F_1(i\omega) F_2(i\omega), \quad (1.130)$$

известное как *теорема о свертке*. Формулы (1.129) и (1.130) легко доказывают заменой переменной интегрирования $s = t - \tau$. Преобразование Фурье переводит операцию свертки в более простую операцию – умножение изображений $F_1(i\omega)$ и $F_2(i\omega)$.

В правой части формулы (1.128) $f_1(\tau)$ заменим интегралом (1.115):

$$f_1 * f_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega f_2(t - \tau) d\tau.$$

Обозначив $s = t - \tau$, представим свертку в виде

$$f_1 * f_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) e^{i\omega(t-s)} d\omega f_2(s) ds.$$

Изменив порядок интегрирования, с учетом формулы (1.114) получим

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_1(i\omega) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(s) e^{-i\omega s} ds \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) F_2(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Если для функций f_1 и f_2 существуют интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t) dt$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f_2^2(t) dt$, то имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) F_2(-i\omega) d\omega, \quad (1.132)$$

известное как *теорема Планшереля*¹. В частности, если $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega, \quad (1.133)$$

так как $F(i\omega)$ и $F(-i\omega)$ по определению (1.114) – комплексные сопряженные числа и $|F(i\omega)|^2 = F(i\omega)F(-i\omega)$. Формула (1.133) является аналогом равенства Парсеваля (1.48) для рядов Фурье.

1.17. Спектральный и корреляционный анализ непериодических сигналов

Определение 1.17. В радиотехнике интеграл (1.114) называется *спектральной плотностью*, или спектральной функцией, $S(i\omega)$ одиночного импульса $f(t)$:

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \hat{F}[f(t)] = F(i\omega). \quad (1.134)$$

Таким образом, по определению (1.134) свойства спектральной функции идентичны рассмотренным выше свойствам преобразования Фурье.

Отделим в $S(i\omega)$ действительную и мнимую части, применив в подынтегральном выражении (1.134) формулу Эйлера:

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (1.135)$$

Из формулы (1.135) следует, что если $f(t)$ – четный сигнал, то $S(i\omega)$ – действительная величина и

$$S(i\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2F_c(\omega), \quad (1.136)$$

и если $f(t)$ – нечетный сигнал, то $S(i\omega)$ – чисто мнимая величина и

$$S(i\omega) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -2iF_s(\omega). \quad (1.137)$$

¹Планшерель Мишель (1885–1967) – швейцарский математик.

Здесь $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ – косинус- и синус-преобразования функции $f(t)$ соответственно.

Определение 1.18. Модуль спектральной функции $S(i\omega)$ называется *амплитудным спектром* $S(\omega)$ импульса $f(t)$:

$$S(\omega) = |S(i\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right|. \quad (1.138)$$

Из равенства (1.135) следует, что действительная часть $S(i\omega)$ – четная функция ω , а мнимая часть – нечетная функция. Поэтому амплитудный спектр – всегда четная функция $S(-\omega) = S(\omega)$.

Амплитудные спектры сигнала $f(t)$ и его временной копии $f(t-\tau)$ равны. Это следует из формулы (1.138), теоремы запаздывания (1.117) и равенства $|e^{-\omega\tau i}| = 1$.

Определение 1.19. Энергетическим спектром $W(\omega)$ сигнала $f(t)$ называется квадрат его амплитудного спектра

$$W(\omega) = |F(i\omega)|^2 = S^2(\omega). \quad (1.139)$$

Энергия сигнала $f(t)$ (на единичном сопротивлении) задается равенством (1.134):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (1.140)$$

Определение 1.20. Аргумент спектральной функции, взятый с обратным знаком, называется *фазовым спектром*:

$$\Phi(\omega) = -\arg S(i\omega). \quad (1.141)$$

Поскольку $S(i\omega)$ и $S(-i\omega)$ – сопряженные комплексные числа, то

$$\Phi(\omega) = \arg S(-i\omega). \quad (1.142)$$

Для четного сигнала ($f(-t) = f(t)$) фазовый спектр $\Phi(\omega)$ – четная функция ω ($\Phi(\omega) = \Phi(-\omega)$), причем $\Phi(\omega) = 0$, если $S(i\omega) > 0$, и $\Phi(\omega) = \pi$, если $S(i\omega) < 0$. Если же сигнал $f(t)$ нечетный, то его фазовый спектр $\Phi(\omega)$ – нечетная функция ω , причем $\Phi(\omega) = \pm \frac{\pi}{2}$. Для сигнала $f(t)$, не обладающего свойствами четности или нечетности, $\Phi(\omega)$ – всегда нечетная функция ω , значения которой принадлежат промежутку $(-\pi; \pi]$. Эти свойства $\Phi(\omega)$ следуют из формул (1.112), (1.114) и определения $\Phi(\omega)$.

Определение 1.21. Автокорреляционной функцией (АКФ) $k(\tau)$ сигнала $f(t)$ называется интеграл

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau) dt. \quad (1.143)$$

АКФ служит мерой количественного отличия сигнала $f(t)$ от его временной копии $f(t-\tau)$. АКФ дает представление о длительности и скорости изменения сигнала во времени. Функция $k(\tau)$ является четной. Действительно, если в интеграле (1.143) сделать замену переменной интегрирования $\zeta = t - \tau$ и учесть, что обозначение переменной интегрирования не влияет на значение несобственного интеграла, то получим

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)f(\zeta+\tau) d\zeta = k(-\tau). \quad (1.144)$$

Интеграл (1.143) является частным случаем свертки $f_1 * f_2$, если в формуле (1.128) принять $f_1 = f(t)$, $f_2 = f(-t)$. Поэтому из формул (1.131), (1.139) и теоремы подобия (1.119), для $k(\tau)$ следует равенство

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)F(-i\omega)e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (1.145)$$

Если $\tau = 0$, то по формуле (1.133) АКФ равна энергии сигнала $f(t)$:

$$k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = E. \quad (1.146)$$

Поскольку $|e^{i\omega\tau}| = 1$, то

$$|k(\tau)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)F(-i\omega)e^{i\omega\tau} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega = E.$$

Таким образом, АКФ по модулю не превосходит энергию сигнала. Из сказанного следует, что график АКФ симметричен относительно оси ординат с максимальным значением при $\tau = 0$, которое всегда положительно.

Из равенства (1.143) следует, что АКФ сигнала $f(t)$ и его временной копии $f(t-t_0)$ равны при любом конечном значении t_0 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)f(t-t_0-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)f(\xi-\tau) d\xi = k(\tau), \quad \text{где } \xi = t-t_0.$$

Сравнивая формулу (1.145)

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

с формулой (1.115)

$$f(x) = \hat{F}^{-1}[F(i\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

зключаем, что АКФ представляет собой обратное преобразование Фурье для $W(\omega)$. Следовательно, $W(\omega)$ – это преобразование Фурье для $k(\tau)$:

$$W(\omega) = \hat{F}[k(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.147)$$

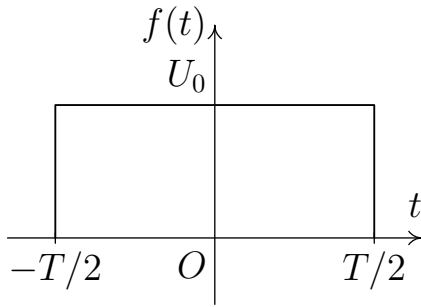


Рис. 1.24

Соотношения (1.145), (1.147) имеют важное значение в радиотехнике, так как по распределению энергии сигнала по спектру можно оценить корреляционные свойства сигнала. Эти формулы позволяют вычислить одну из функций, если другая определена экспериментально.

Пример 1.9. Найти спектральную плотность прямоугольного импульса (рис. 1.24), АКФ, энергию сигнала. Построить графики амплитудного и фазового спектров, если $T = 2$, $U_0 = 1$.

Решение. Поскольку сигнал $f(t)$ – четная функция, значит, спектральная плотность – действительная величина и четная функция ω , тогда по формуле (1.136) находим

$$F(i\omega) = 2 \int_0^{T/2} U_0 \cos \omega t dt = \begin{cases} \frac{2U_0}{\omega} \sin \frac{T\omega}{2}, & \omega \neq 0 \\ U_0 T, & \omega = 0. \end{cases}$$

Амплитудный спектр

$$S(\omega) = |F(i\omega)| = \begin{cases} 2U_0 \left| \frac{\sin \frac{T\omega}{2}}{\omega} \right|, & \omega \neq 0 \\ U_0 T, & \omega = 0. \end{cases}$$

При $\omega=0$ $S(0)=U_0T$. Если $T=2$, $U_0=1$, то $S(0)=2$, $S(\omega)=2 \left| \frac{\sin \omega}{\omega} \right|$.

Фазовый спектр $\Phi(\omega)$ четного сигнала $f(t)$ – четная функция ω :

$$\Phi(\omega) = -\arg \frac{2 \sin \omega}{\omega} = \begin{cases} 0, & \omega \in (2\pi n, 2\pi n + \pi) \cup (-\pi - 2\pi n, -2\pi n), \\ \pi, & \text{в остальных интервалах,} \end{cases}$$

$n=0, 1, 2, \dots$

Графики амплитудного и фазового спектров изображены на рис. 1.25 и 1.26 соответственно.

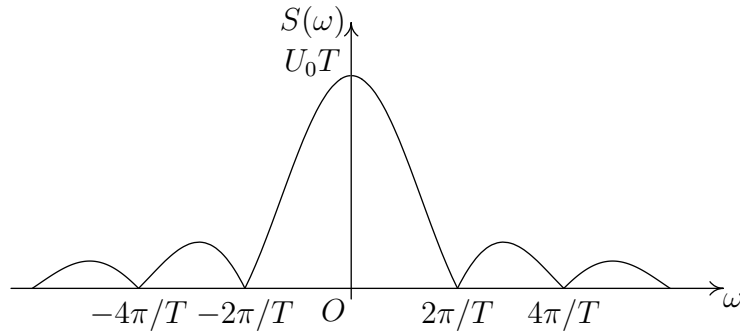


Рис. 1.25

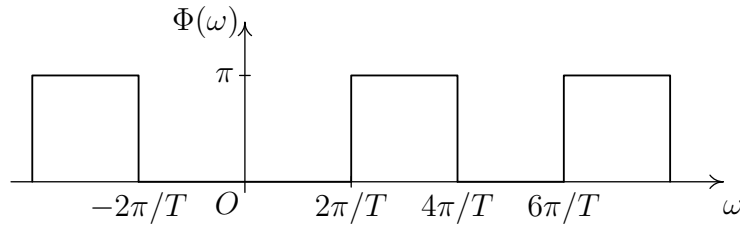


Рис. 1.26

Для вычисления АКФ представим $f(t)$ и $f(t-\tau)$ аналитически при $T=2$, $U_0=1$ и $0 \leq \tau < 2$ в следующем виде:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| < 1, \\ 0, & \text{если } |t| > 1, \end{cases}$$

$$f(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau - 1 < t < \tau + 1, \\ 0, & \text{если } t < \tau - 1 \text{ или } t > \tau + 1. \end{cases}$$

Функции $f(t)$ и $f(t-\tau)$ при $0 \leq \tau < 2$ одновременно отличны от нуля только на промежутке $(\tau - 1; 1)$, следовательно,

$$f(t)f(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau - 1 < t < 1, \\ 0, & t \in (-\infty, \tau - 1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Отсюда

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau) dt = \begin{cases} \int_{\tau-1}^1 dt = 2 - \tau, & \text{если } 0 \leq \tau < 2, \\ 0, & \text{если } \tau \geq 2. \end{cases}$$

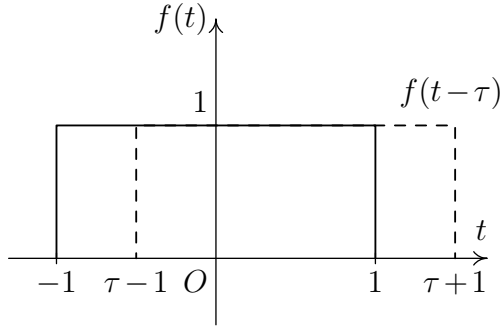


Рис. 1.27

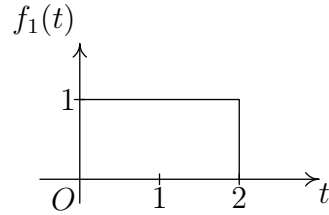


Рис. 1.28

Учитывая, что $k(\tau) = k(-\tau)$, имеем для $\tau < 0$

$$k(\tau) = \begin{cases} 2 + \tau, & -2 \leq \tau \leq 0, \\ 0, & \tau < -2. \end{cases}$$

Объединив оба выражения, запишем окончательно

$$k(\tau) = \begin{cases} 2 - |\tau|, & |\tau| \leq 2, \\ 0, & |\tau| > 2. \end{cases}$$

Энергия сигнала $E = \int_{-1}^1 1^2 dt = 2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = k(0)$.

Пример 1.10. Найти преобразование Фурье сигнала

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2, \\ 0, & t < 0, t > 2, \end{cases}$$

а также амплитудный и фазовый спектры. Построить их графики. Найти АКФ.

Решение. Импульс $f_1(t)$ – это запаздывающий на 1 импульс $f(t)$ из примера 1.9 при $T=2$, $U_0=1$, т. е. $f_1(t) = f(t-1)$. Его преобразование Фурье находим по теореме запаздывания (1.117), используя результат предыдущей задачи:

$$F_1(i\omega) = \hat{F}[f(t-1)] = e^{-i\omega} \hat{F}[f(t)] = \begin{cases} \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{-i\omega}, & \omega \neq 0 \\ 2, & \omega = 0. \end{cases}$$

Поскольку $f_1(t)$ – временная копия сигнала $f(t)$, то амплитудные спектры этих сигналов, а также АКФ одинаковы. Амплитудный спектр

$$S_1(\omega) = S(\omega) = \begin{cases} \frac{2|\sin \omega|}{|\omega|}, & \omega \neq 0, \\ 2, & \omega = 0 \end{cases}$$

изображен на рис. 1.25. Поскольку $F_1(i\omega)$ – комплексная величина, то фазовый спектр $\Phi_1(\omega)$ – нечетная функция ω и можно ограничиться значениями $\Phi_1(\omega)$ при $\omega \geq 0$. Так как $e^{-i\omega} = \cos \omega - i \sin \omega$, то

$$\Phi_1(\omega) = -\arg \frac{2 \sin \omega (\cos \omega - i \sin \omega)}{\omega} = -\arg \frac{\sin 2\omega - i(1 - \cos 2\omega)}{\omega}. \quad (1.148)$$

Числитель в формуле (1.148) есть периодическая функция с периодом π , поэтому для $\omega \geq 0$ $\arg F_1(i\omega)$ достаточно рассмотреть для интервала $(0; \pi)$ на котором $\frac{\sin \omega}{\omega} > 0$. Так как от умножения на положительное число аргумент комплексного числа не меняется, то $-\arg \left(\frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{-i\omega} \right) = -\arg(e^{-i\omega}) = \omega$, тогда

$$\Phi_1(\omega) = \begin{cases} \omega, & 0 \leq \omega < \pi, \\ 0, & \omega = 0 \\ -\omega, & -\pi < \omega \leq 0, \end{cases} \quad \Phi_1(\omega + \pi) = \Phi_1(\omega).$$

График $\Phi_1(\omega)$ изображен на рис. 1.29.

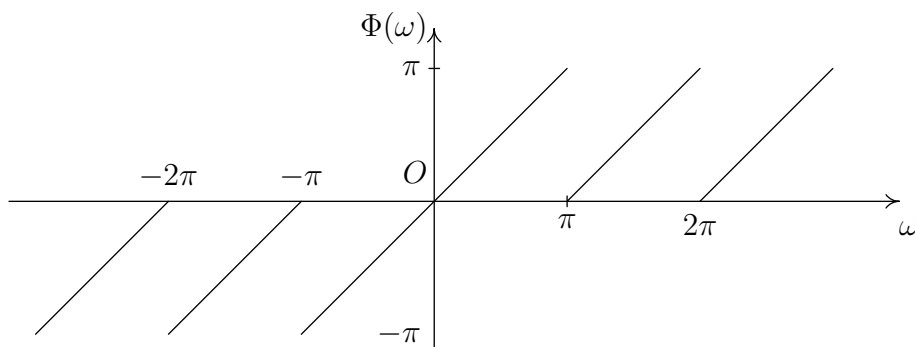


Рис. 1.29

Автокорреляционные функции сигнала $f(t)$ и его временной копии $f_1(t)$ равны, следовательно,

$$k(\tau) = \begin{cases} 2 - |\tau|, & |\tau| \leq 2, \\ 0, & |\tau| > 2. \end{cases}$$

Пример 1.11. Найти преобразование Фурье сигнала

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$\alpha > 0$. Построить амплитудный и фазовый спектры. Найти АКФ.

Решение. Преобразование Фурье

$$F(i\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Амплитудный спектр

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

График для случая $\alpha = 1$ изображен на рис. 1.30.

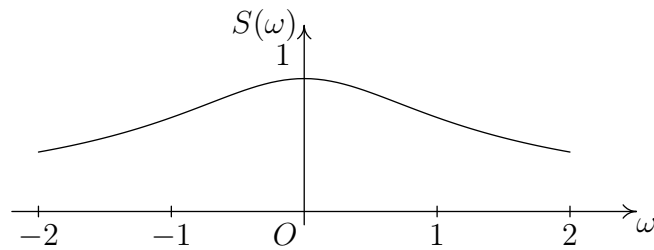


Рис. 1.30

Фазовый спектр (график изображен на рис. 1.31)

$$\Phi(\omega) = -\arg \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = -\arg(\alpha - i\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}.$$

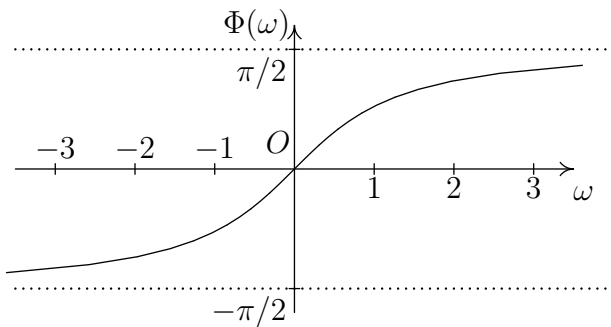


Рис. 1.31

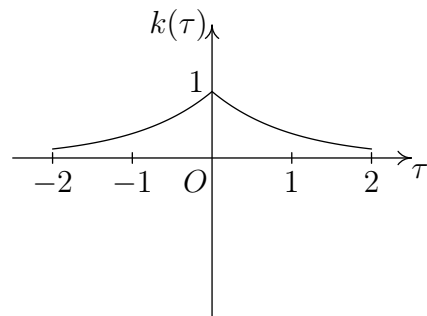


Рис. 1.32

Найдем АКФ $k(\tau)$ при $\tau > 0$. Так как

$$f(t - \tau) = \begin{cases} e^{-\alpha(t-\tau)}, & t - \tau > 0, \\ 0, & t - \tau < 0, \end{cases}$$

то $f(t)f(t-\tau)$ отлично от нуля, если $t > \tau$. Поэтому формула (1.143) принимает вид

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-\alpha(t-\tau)} dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-\alpha(t-\tau)} dt = \frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha}.$$

Функция $k(\tau)$ – четная, поэтому для $\tau < 0$ имеем $k(\tau) = \frac{e^{\alpha\tau}}{2\alpha}$. Объединив обе формулы, получим $k(\tau) = \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{2\alpha}$. График АКФ для $\alpha = 1$ изображен на рис. 1.32.

Пример 1.12. Найти спектральную функцию $F(i\omega)$ треугольного импульса $f(t)$ (рис. 1.33), построить графики его амплитудного и фазового спектров. Найти АКФ.

Решение.

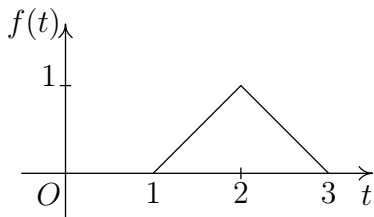


Рис. 1.33

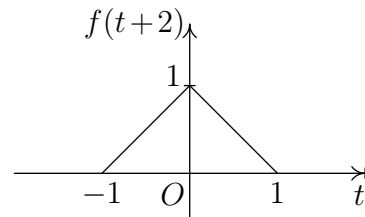


Рис. 1.34

Для упрощения вычислений рассмотрим сигнал $f(t+2)$ (рис. 1.34), который является четной функцией. Опишем $f(t+2)$ аналитически:

$$f(t+2) = \begin{cases} t+1, & -1 < t < 0, \\ 1-t, & 0 < t < 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases} \quad (1.149)$$

Производная $\frac{df(t+2)}{dt}$ – нечетная функция, определенная всюду, кроме точек $t=0$ и $t=\pm 1$:

$$\frac{df(t+2)}{dt} = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0, \\ -1, & 0 < t < 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Отсюда по формуле (1.137) находим

$$\hat{F} \left[\frac{df(t+2)}{dt} \right] = 2i \int_0^1 \sin \omega t dt = \frac{2i}{\omega} (1 - \cos \omega) = \frac{4i}{\omega} \sin^2 \frac{\omega}{2}.$$

С другой стороны, используя формулы (1.117) и (1.123), получаем

$$\hat{F} \left[\frac{df(t+2)}{dt} \right] = i\omega \hat{F}[f(t+2)] = e^{2\omega i} i\omega F(i\omega).$$

Выразив из последнего равенства $F(i\omega)$, получим

$$F(i\omega) = \frac{e^{-2\omega i}}{\omega i} \hat{F} \left[\frac{df(t+2)}{dt} \right] = \frac{4e^{-2\omega i}}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}, \quad \omega \neq 0.$$

При $\omega = 0$ $F(0) = \int_1^3 f(t) dt = 1$. Этот интеграл равен площади треугольника на рис. 1.33. Так как $|e^{-2i\omega}| = 1$, то амплитудный спектр

$$S(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}, & \omega \neq 0, \\ 1, & \omega = 0. \end{cases}$$

График $S(\omega)$ изображен на рис. 1.35.

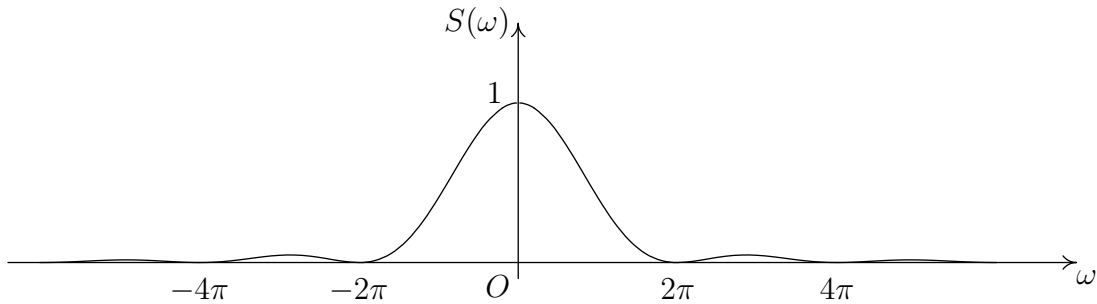


Рис. 1.35

Спектральная функция $F(i\omega)$ – комплексная величина, поэтому фазовый спектр $\Phi(\omega)$ – нечетная функция ω . Функция $F(i\omega)$ равна нулю в точках $\omega = 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Так как аргумент нуля не определен, то фазовый спектр в этих точках не существует. При $\omega = 0$ фазовый спектр равен 0:

$$\Phi(0) = \arg F(0) = \arg 1 = 0.$$

В выражении $F(i\omega)$ множитель $\frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}$ больше нуля и его аргумент равен нулю при $\omega \neq 2k\pi$. Аргумент произведения комплексных

чисел равен сумме аргументов сомножителей, поэтому

$$\Phi(\omega) = -\arg \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega}{2} \cdot e^{-2i\omega} = -\arg(e^{-2i\omega}).$$

Так как $-\arg e^{-2i\omega} = \arg e^{2i\omega}$ и функция $e^{2i\omega}$ имеет период π , то $\Phi(\omega) = \Phi(\omega + \pi) = \arg e^{2i\omega}$. Кроме того, $\Phi(\omega)$ – это главное значение аргумента $F(i\omega)$, которое должно удовлетворять неравенству $-\pi < \arg e^{2i\omega} \leq \pi$ или $-\pi < 2\omega \leq \pi$. Таким образом,

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & -\frac{\pi}{2} < \omega \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \omega = 0, \end{cases} \quad \Phi(\omega + \pi) = \Phi(\omega).$$

График $\Phi(\omega)$ изображен на рис. 1.36.

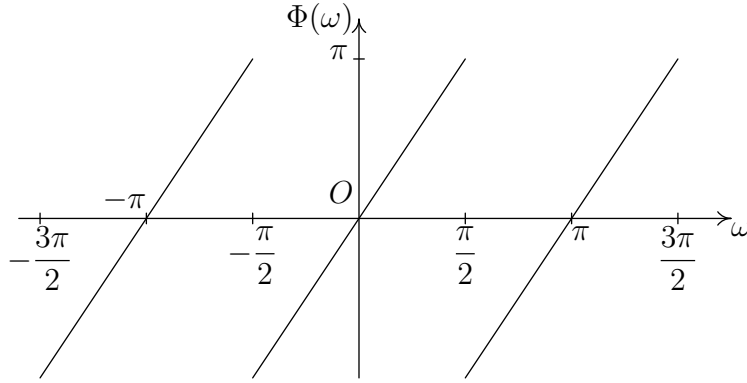


Рис. 1.36

АКФ сигналов $f(t)$ и $f(t+2)$ совпадают. Найдем АКФ для сигнала $f(t+2)$ при $\tau > 0$. Функция $f(t+2)$ отлична от нуля на интервале $(-1; 1)$, а функция $f(t-\tau+2)$ – на интервале $(-1+\tau; 1+\tau)$. При $0 < \tau < 2$ упомянутые множества пересекаются. Следовательно, подынтегральная функция $f(t+2)f(t-\tau+2)$ в равенстве (1.143) отлична от нуля только на интервале $(-1+\tau; 1)$. Отсюда

$$k(\tau) = \int_{-1+\tau}^1 f(t+2)f(t-\tau+2) dt, \quad 0 < \tau < 2. \quad (1.150)$$

Поскольку $f(t+2)$ задается в равенстве (1.149) двумя разными выражениями на отрезках $[-1; 0]$ и $[0; 1]$, то вид подынтегральной функции в формуле (1.150) различен для $\tau \in (0; 1)$ и $\tau \in (1; 2)$. Поясним это графически, изобразив графики сигналов $f(t+2)$ и $f(t-\tau+2)$ для этих диапазонов значений τ .

Из рис. 1.37 и формулы (1.149) видим, что при $0 < \tau < 1$

$$f(t+2)f(t-\tau+2) = (t+1)(t-\tau+1), \quad \text{если } -1+\tau < t < 0,$$

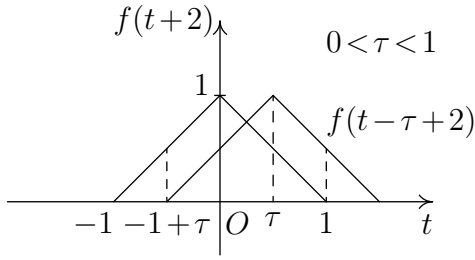


Рис. 1.37

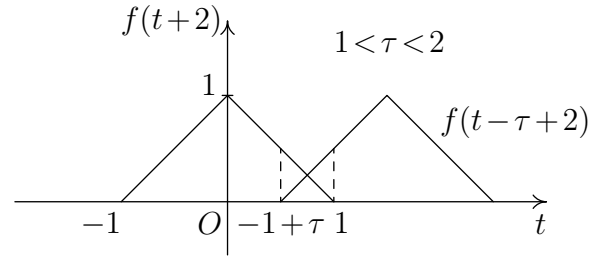


Рис. 1.38

$$f(t+2)f(t-\tau+2) = (1-t)(t-\tau+1), \text{ если } 0 < t < \tau,$$

$$f(t+2)f(t-\tau+2) = (1-t)(1-t+\tau), \text{ если } \tau < t < 1.$$

Отсюда

$$k(\tau) = \int_{-1+\tau}^0 (t+1)(t-\tau+1) dt + \int_0^{\tau} (1-t)(t-\tau+1) dt + \int_{\tau}^1 (1-t)(1-t+\tau) dt, \quad 0 < \tau < 1.$$

Из рис. 1.38 и формулы (1.149) при $1 < \tau < 2$ следует, что $f(t+2)f(t-\tau+2) = (1-t)(t-\tau+1)$, если $-1+\tau < t < 1$. Отсюда

$$k(\tau) = \int_{-1+\tau}^1 (1-t)(t-\tau+1) dt, \quad 1 < \tau < 2.$$

После вычисления интегралов и нескольких преобразований для $k(\tau)$ получим

$$k(\tau) = \frac{\tau^3}{2} - \tau^2 + \frac{2}{3}, \text{ если } \tau \in (0, 1),$$

$$k(\tau) = \frac{1}{6}(2-\tau)^3, \text{ если } \tau \in (1, 2).$$

Учитывая, что $k(-\tau) = k(\tau)$, окончательно получим

$$k(\tau) = \begin{cases} \frac{|\tau|^3}{2} - \tau^2 + \frac{2}{3}, & \text{если } |\tau| < 1, \\ \frac{1}{6}(2-|\tau|)^3, & \text{если } 1 < |\tau| < 2, \\ 0, & \text{если } |\tau| > 2. \end{cases}$$

График $k(\tau)$ изображен на рис. 1.39.

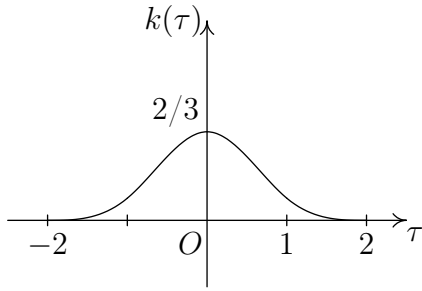


Рис. 1.39

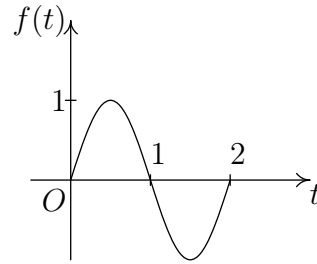


Рис. 1.40

Пример 1.13. Найти спектральную плотность сигнала

$$f(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t < 0, t > 2, \end{cases}$$

амплитудный и фазовый спектры, АКФ. Построить их графики.

Решение. Используя табличный интеграл (табл. Б.1 прил. Б), находим спектральную функцию

$$F(i\omega) = \int_0^2 \sin \pi t e^{-i\omega t} dt = \frac{\pi}{\pi^2 - \omega^2} (1 - e^{-2i\omega}). \quad (1.151)$$

Последнее выражение справедливо при $\omega \neq \pm\pi$. Для $\omega = \pm\pi$ вычислим $F(i\omega)$ отдельно:

$$F(i\pi) = \int_0^2 \sin \pi t e^{\mp i\pi t} dt = \int_0^2 \sin \pi t (\cos \pi t \mp i \sin \pi t) dt = \mp i.$$

Преобразуем выражение (1.151):

$$F(i\omega) = \frac{2\pi i e^{-i\omega}}{\pi^2 - \omega^2} \left(\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \right) = \frac{2\pi e^{-i\omega} \sin \omega i}{\pi^2 - \omega^2}.$$

Эту спектральную функцию можно найти иначе, не прибегая к вычислению интеграла (1.151), а используя результаты расчетов из примера 1.10 и теорему о модуляции (1.122). Для этого представим сигнал в виде произведения двух функций $f(t) = f_1(t) \sin \pi t$, где $f_1(t)$ – прямоугольный импульс, изображенный на рис. 1.28. Его спектральная функция

$$F_1(i\omega) = \frac{2e^{-i\omega} \sin \omega}{\omega}.$$

По теореме о модуляции (1.122) при $a = \pi$ получим

$$F(i\omega) = \hat{F}[f_1(t) \sin \pi t] = \frac{i}{2} \{F_1(i(\omega + \pi)) - F_1(i(\omega - \pi))\}.$$

Поскольку $e^{\pm i\pi} = -1$, а $\sin(\omega \pm \pi) = -\sin \omega$, то

$$F(i\omega) = ie^{-i\omega} \sin \omega \left(\frac{1}{\omega + \pi} - \frac{1}{\omega - \pi} \right) = \frac{2\pi i \sin \omega}{\pi^2 - \omega^2} e^{-i\omega}.$$

Так как $|ie^{-i\omega}| = 1$, то амплитудный спектр

$$S(\omega) = \begin{cases} 2\pi \left| \frac{\sin \omega}{\pi^2 - \omega^2} \right|, & \omega \neq \pi \\ 1, & \omega = \pm\pi. \end{cases}$$

График $S(\omega)$ изображен на рис. 1.41

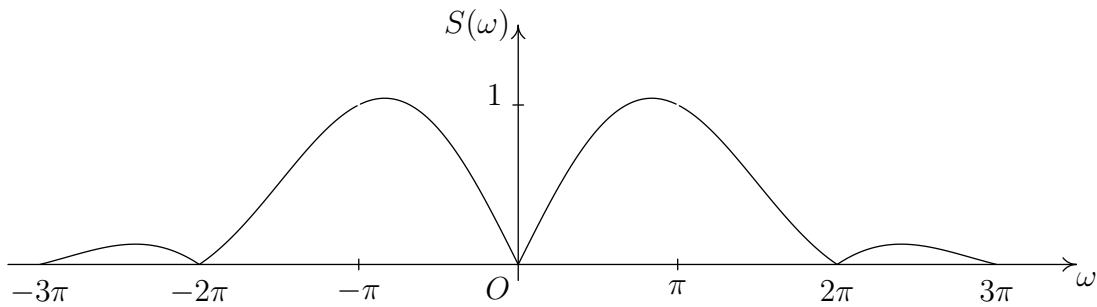


Рис. 1.41

Фазовый спектр $\Phi(\omega)$ – нечетная функция, поэтому его вычисление проведем для $\omega > 0$. В точках, где $S(\omega) = 0$, фазовый спектр не определен. В точке $\omega = \pi$ $\Phi(\omega) = -\arg F(i\omega) = -\arg(-i) = \frac{\pi}{2}$. Функция $1 - e^{-2i\omega}$ периодическая с периодом π , поэтому фазовый спектр имеет такой же период на интервалах, в которых действительный множитель $\frac{\pi}{\pi^2 - \omega^2}$ сохраняет знак. На интервале $(0, 2\pi)$ функция $\frac{2\pi \sin \omega}{\pi^2 - \omega^2}$ положительна, а значит, её аргумент равен 0. Если $\omega - \frac{\pi}{2} \leq \pi$, то

$$\Phi(\omega) = -\arg \frac{2\pi \sin \omega i e^{-i\omega}}{\pi^2 - \omega^2} = -\arg i e^{-i\omega} = \omega - \frac{\pi}{2},$$

так как значение $\Phi(\omega)$ должно быть не больше π . При $\omega > \frac{3\pi}{2}$ значение $\omega - \frac{\pi}{2} > \pi$, значит, в этом случае $\Phi(\omega) = \omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi = \omega - \frac{5\pi}{2}$. Таким образом, на интервале $(0, 2\pi)$ фазовый спектр определяется по формуле

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \omega - \frac{\pi}{2}, & 0 < \omega \leq \frac{3\pi}{2}, \\ \omega - \frac{5\pi}{2}, & \frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi. \end{cases}$$

По полученной формуле строим график при $\omega \in (0, 2\pi)$ (рис. 1.42). Затем график, построенный на промежутке $(\pi, 2\pi)$, периодически продолжаем с периодом π на интервал (π, ∞) . Для $\omega < 0$ строим график с учетом нечетности функции $\Phi(\omega)$.

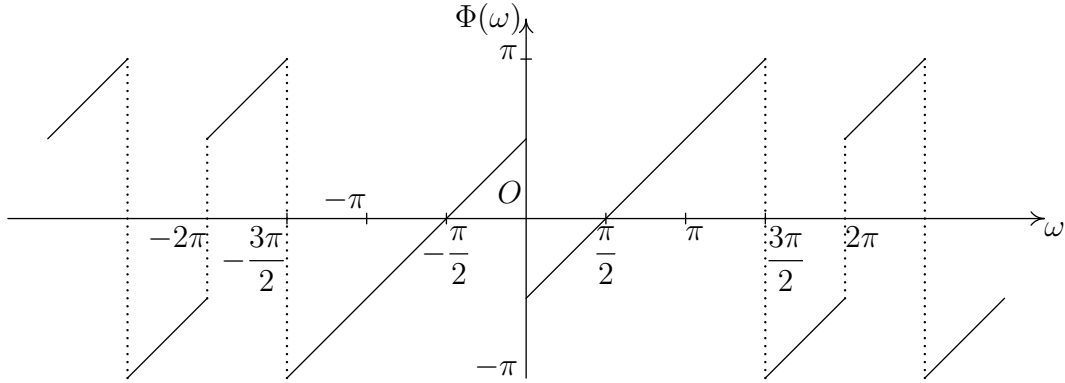


Рис. 1.42

АКФ находим по формуле (1.143), используя рис. 1.43.

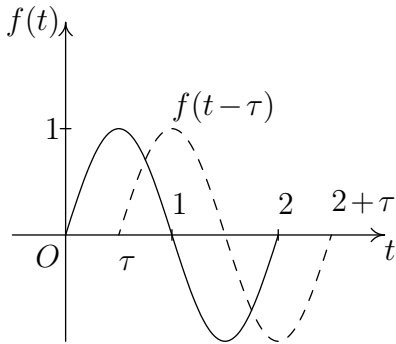


Рис. 1.43

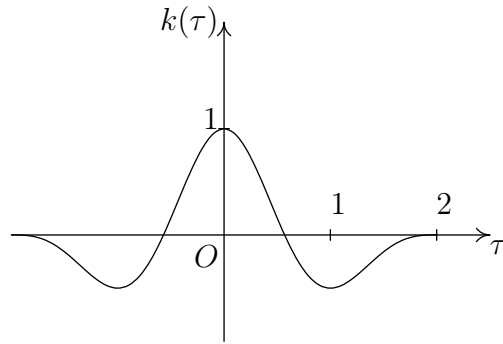


Рис. 1.44

Из рис. 1.43 видим, что $f(t)$ и $f(t-\tau)$ одновременно отличны от нуля только на интервале $(\tau, 2)$, поэтому формула (1.143) принимает вид

$$k(\tau) = \int_{\tau}^2 \sin \pi t \sin \pi(t-\tau) dt = \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \cos \pi\tau + \frac{1}{2\pi} \sin \pi\tau.$$

Поскольку $k(\tau) = k(-\tau)$, то

$$k(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{2}\right) \cos \pi\tau + \frac{1}{2\pi} \sin \pi|\tau|, & |\tau| \leq 2, \\ 0, & |\tau| > 2. \end{cases}$$

$$k(0) = 1 = E = \int_{-2}^2 \sin^2 \pi t dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (1 - \cos 2\pi t) dt = 1.$$

График $k(\tau)$ изображен на рис. 1.44.

1.18. Преобразование Фурье неинтегрируемых функций

Введем единичную функцию Хевисайда¹ и дельта-функцию $\delta(t)$:

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0; \end{cases} \quad h(t-t_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > t_0, \\ 0, & \text{если } t < t_0; \end{cases} \quad (1.152)$$

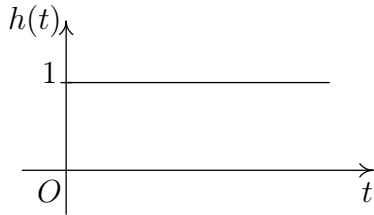


Рис. 1.45

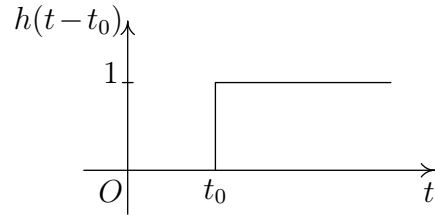


Рис. 1.46

В радиотехнике функция $h(t)$ называется функцией включения. Эта функция является математической моделью мгновенного перехода от нулевого до единичного значения тока или напряжения в некоторой электрической цепи.

Дельта-функцией Дирака² называется функция

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t=0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0; \end{cases} \quad (1.153)$$

удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \int_{-\infty}^t \delta(x) dx = h(t); \quad (1.154)$$

$$h'(t) = \delta(t); \quad h'(t-t_0) = \delta(t-t_0). \quad (1.155)$$

Дельта-функция имеет фильтрующее свойство:

$$\int_a^b f(t) \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), & a < t_0 < b, \\ 0, & t_0 < a, \quad t_0 > b. \end{cases} \quad (1.156)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0). \quad (1.157)$$

¹Хевисайд Оливер (1850–1925) – английский физик.

²Дирак, Поль Адриен Морис (1902–1984) – английский физик.

Условия (1.153), (1.154), (1.155) оказываются несовместимыми, если рассматривать их с позиций классического математического анализа, и поэтому дельта-функция не является "функцией" в обычном смысле. Она относится к классу так называемых *обобщенных функций*. Дельта-функцию можно рассматривать как предел последовательности функций $f(\lambda, t) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)}$ при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t > 0, \\ \infty, & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dt}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1.$$

При таком определении $\delta(t)$ является четной функцией t .

Найдем преобразование Фурье функции Хевисайда. Функция $h(t)$ по определению (1.152) не является абсолютно интегрируемой на всей числовой оси и поэтому преобразование Фурье (1.114) для такой функции не существует. Однако, используя понятие дельта-функции, функцию Хевисайда можно определить с помощью следующего предельного перехода:

$$h(t) = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} \quad (1.158)$$

Тогда преобразование Фурье функции $h(t)$

$$\hat{F}[h(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

Выполнив деление на $\alpha + i\omega$, запишем

$$\hat{F}[h(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (1.159)$$

При $\alpha = 0$ первое слагаемое в правой части равенства (1.159) равно нулю при всех ω , кроме $\omega = 0$, при котором оно обращается в бесконечность. Интеграл от первого слагаемого по ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

независимо от значений α . Поэтому пределом первого слагаемого в формуле (1.159) можно считать функцию $\pi\delta(\omega)$. Предел второго слагаемого в равенстве (1.159)

$$i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{i}{\omega}.$$

Из этого следует, что

$$\hat{F}[h(t)] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \pi\delta(\omega) - \frac{i}{\omega}. \quad (1.160)$$

Преобразование Фурье дельта-функции по фильтрующему свойству (1.157)

$$\hat{F}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0}.$$

При $t_0 = 0$ $\hat{F}[\delta(t)] = 1$.

Понятие дельта-функции широко используется в радиоэлектронике и теории связи при исследовании воздействия очень коротких импульсов напряжения на линейные цепи. При этом нужно помнить, что дельта-функция не имеет самостоятельного значения, а имеет смысл только как множитель подынтегрального выражения.

Пример 1.14. Найти спектральную функцию импульса изображенного на рис. 1.46,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

Решение. По условию $f(t) = h(t - t_0)$. В силу соотношений (1.155) $f'(t) = h'(t - t_0) = \delta(t - t_0)$. Пусть $F(i\omega)$ – искомая спектральная плотность. Используя свойство (1.123) преобразований Фурье, запишем $\hat{F}[f'(t)] = i\omega F(i\omega)$. С другой стороны, применяя формулы (1.114) и (1.157), получаем

$$\hat{F}[f'(t)] = \hat{F}[\delta(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t - t_0) dt = e^{-i\omega t_0} = i\omega F(i\omega).$$

Значит, $F(i\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{i\omega}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Упражнения

1. Доказать, что если интегрируемая периодическая функция $f(x)$ имеет период l , то

$$\int_a^{a+l} f(t) dt = \int_0^l f(t) dt = \int_{-l/2}^{l/2} f(t) dt.$$

2. Доказать, что система первых четырех функций Уолша $Wal_k(x)$, $k=0, 1, 2, 3$ (рис. 1.47) ортонормированная.

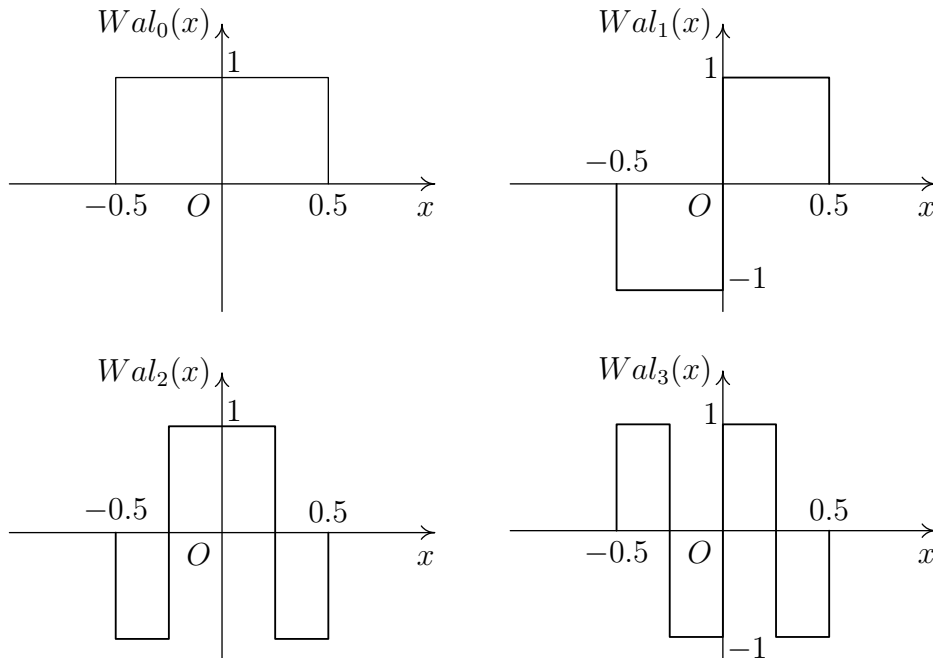


Рис. 1.47

3. Найти первые четыре коэффициента Фурье в разложении импульса $f(t)$ треугольной формы (рис. 1.48) по системе функций Уолша $Wal_k(x)$ (рис. 1.47). Сравнить графики импульса $f(t)$ и его аппроксимации $S_4(t)$ четырьмя первыми членами ряда по системе функций Уолша. Вычислить и сравнить энергии импульса $f(t)$ и его аппроксимации $S_4(t)$.

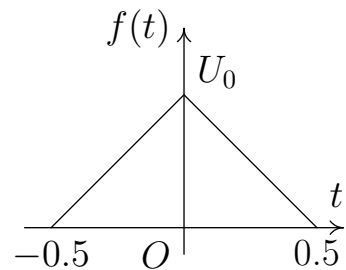


Рис. 1.48

Указание. При вычислении энергии использовать формулу (1.15).

4. Разложить функцию $f(x) = |x|$, $-1 \leq x \leq 1$ в ряд Фурье, найти сумму ряда $S(x)$ в точке $x = 1$. Используя полученный ряд, найти суммы

числовых рядов: а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(4n+1)^2(4n+3)^2}$.

5. Разложить периодическую функцию $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$, $0 < x < 2\pi$, периода 2π , в ряд Фурье и, используя равенство Парсеваля – Стеклова, найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Просуммировать ряды $S_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$, $S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$.

Указание. Рассмотреть сумму $S_1(x) + iS_2(x)$.

7. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(x+\pi) = f(-x)$. Доказать, что все четные коэффициенты ее тригонометрического ряда Фурье равны нулю: $a_0 = a_2 = b_2 = a_4 = b_4 = \dots = 0$.

Указание. Разложить в ряды Фурье функции $f(x)$ и $f(x+\pi)$. Использовать ортогональность тригонометрической системы функций.

8. Пусть $f(x)$ – непрерывная функция, разлагающаяся в тригонометрический ряд Фурье и удовлетворяющая условиям $f(x+\pi) = f(-x)$, $f(-x) = -f(x)$. Доказать, что $a_0 = a_n = b_{2n} = 0$, $n \geq 1$.

9. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$, $0 < t < \infty$.

10. Доказать равенства:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & x < a, x > b \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(x-a) - \sin \omega(x-b)}{\omega} d\omega;$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi \omega}{1-\omega^2} \sin \omega x d\omega.$$

11. Пусть $f(x) = 0$ при $|x| > l$, а при $|x| \leq l$ функция $f(x)$ – четная, вещественная. Доказать, что ее спектральная плотность – вещественная, четная функция, а если $f(x)$ нечетная, то и ее спектральная функция нечетная, мнимая.

12. Свертка сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяется интегралом $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$, а спектральная плотность $F_1(i\omega) = \hat{F}[f_1(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt$. Доказать, что если $\hat{F}[f_1(t)] = F_1(i\omega)$, $\hat{F}[f_2(t)] = F_2(i\omega)$, то $\hat{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(i\omega) F_2(i\omega)$, $\hat{F}[f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(i\omega) * F_2(i\omega)$.

13. Доказать, что если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуе-

мы по Фурье и их спектральные плотности есть соответственно $F_1(i\omega)$ и $F_2(i\omega)$, причем интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) d\omega$, $\int_{-\infty}^{\infty} F_2(i\omega) d\omega$ сходятся абсолютно, то справедливо равенство Планшереля $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t) dt =$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega)F_2(-i\omega) d\omega.$

14. Доказать, что равенство Планшереля можно записать в вещественной форме $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)S_2(\omega) \cos(\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)) d\omega$, где $S_1(\omega) = |F_1(i\omega)|$, $S_2(\omega) = |F_2(i\omega)|$, $\varphi_1(\omega) = \arg F_1(i\omega)$, $\varphi_2(\omega) = \arg F_2(i\omega)$, и затем доказать справедливость формулы Парсеваля $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega, \text{ где } S(\omega) = |F(i\omega)|, \hat{F}[f(t)] = F(i\omega).$$

15. Автокорреляционная функция сигнала $f(t)$ определяется формулой $k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau) dt$. Доказать, что $k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega$, где $S(\omega)$ – модуль спектральной плотности $F(i\omega) = \hat{F}[f(t)]$.

16. Доказать свойства (1.116)–(1.124) преобразований Фурье.

Задачи

1. Проверить ортогональность системы функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ на указанном отрезке. Если система ортогональна, то нормировать ее:

- 1.1. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, $[-1; 1]$.
- 1.2. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos 2x$, $f_3(x) = \cos 3x$, $[0; \pi]$.
- 1.3. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 3x$, $f_3(x) = \sin 5x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 1.4. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 2x$, $f_3(x) = \sin 3x$, $[0; \pi]$.
- 1.5. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$, $f_3(x) = \cos \pi x$, $[0; 2]$.
- 1.6. $f_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $f_2(x) = \sin \pi x$, $f_3(x) = \sin \frac{3\pi x}{2}$, $[0; 2]$.
- 1.7. $f_1(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $f_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{4}$, $f_3(x) = \sin \frac{5\pi x}{4}$, $[0; 2]$.

- 1.8. $f_1(x) = \sin \pi x$, $f_2(x) = \sin 2\pi x$, $f_3(x) = \sin 3\pi x$, $[0; 1]$.
- 1.9. $f_1(x) = \cos \pi x$, $f_2(x) = \cos 2\pi x$, $f_3(x) = 1$, $[0; 1]$.
- 1.10. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin 3x$, $f_3(x) = \sin 5x$, $[0; \pi]$.
- 1.11. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, $[-1; 1]$.
- 1.12. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $[-1; 1]$.
- 1.13. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \cos 3x$, $[0; \pi]$.
- 1.14. $f_1(x) = \sin 2x$, $f_2(x) = \sin 3x$, $f_3(x) = \sin 4x$, $[0; \pi]$.
- 1.15. $f_1(x) = \sin 3x$, $f_2(x) = \sin 5x$, $f_3(x) = \sin 7x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 1.16. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos 2\pi x$, $f_3(x) = \sin 4\pi x$, $[0; 1]$.
- 1.17. $f_1(x) = \sin 2\pi x$, $f_2(x) = \sin 4\pi x$, $f_3(x) = \sin 6\pi x$, $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
- 1.18. $f_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $f_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{2}$, $f_3(x) = \sin \frac{5\pi x}{2}$, $[0; 1]$.
- 1.19. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$, $[0; 2]$.
- 1.20. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2(x - 1)$, $f_3(x) = (x - 1)^3 - \frac{3}{5}(x - 1)$, $[0; 2]$.
- 1.21. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2(x - 1)$, $f_3(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$, $[0; 2]$.
- 1.22. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = x^2 + 2x + \frac{2}{3}$, $[-2; 0]$.
- 1.23. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin 2x$, $f_3(x) = \cos \frac{x}{2}$, $[0; 2\pi]$.
- 1.24. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 3$, $f_3(x) = x^2 - 6x + 6$, $[0; 6]$.
- 1.25. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = x^2 - 2x - 2$, $[-2; 4]$.
- 1.26. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - 3$, $[-3; 3]$.
- 1.27. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = 3x^2 - 4$, $[-2; 2]$.
- 1.28. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x - 2$, $f_3(x) = 3x^2 - 12x + 8$, $[0; 4]$.
- 1.29. $f_1(x) = \sin \pi x$, $f_2(x) = \cos \pi x$, $f_3(x) = \sin 2\pi x$, $[0; 2]$.
- 1.30. $f_1(x) = \cos \pi x$, $f_2(x) = \cos 2\pi x$, $f_3(x) = \cos 3\pi x$, $[0; 1]$.

2. Разложить функцию $f(x)$ в ряды Фурье в указанных трех интервалах. В последнем из указанных интервалов разложить функцию тремя способами: а) в общий ряд Фурье; б) по синусам; в) по косинусам. Построить графики функций и графики сумм $S(x)$ рядов. Записать равенства Парсеваля – Стеклова для каждого из полученных рядов. При вычисле-

- 2.19. $f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ -2, & b < x < c. \end{cases}$ 1. $a = -\pi, b = 0, c = \pi.$
 2. $a = 0, b = 3, c = 6.$
 3. $a = 0, b = \pi, c = 2\pi.$
- 2.20. $f(x) = x + \pi.$ 1. $(-\pi; \pi).$ 2. $(-1; 1).$ 3. $(0; \pi).$
- 2.21. $f(x) = x + 1.$ 1. $(-2; 2).$ 2. $(-1; 3).$ 3. $(0; 2).$
- 2.22. $f(x) = 1 - x.$ 1. $(-2; 2).$ 2. $(1; 3).$ 3. $(0; 2).$
- 2.23. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$ 1. $(-\pi; \pi).$ 2. $(-1; 3).$ 3. $(0; \pi).$
- 2.24. $f(x) = \begin{cases} 2, & a < x < b, \\ 1, & b < x < c. \end{cases}$ 1. $a = -\pi, b = 0, c = \pi.$
 2. $a = -1, b = 1, c = 3.$
 3. $a = 0, b = 1, c = 2.$
- 2.25. $f(x) = \begin{cases} 2, & a < x < b, \\ -1, & b < x < c. \end{cases}$ 1. $a = -\pi, b = 0, c = \pi.$
 2. $a = 0, b = 1, c = 2.$
 3. $a = 0, b = \pi, c = 2\pi.$
- 2.26. $f(x) = x - 2.$ 1. $(-2; 2).$ 2. $(1; 3).$ 3. $(0; 2).$
- 2.27. $f(x) = \begin{cases} -1, & a < x < b, \\ 1, & b < x < c. \end{cases}$ 1. $a = -\pi, b = 0, c = \pi.$
 2. $a = -1, b = 1, c = 3.$
 3. $a = 0, b = \pi, c = 2\pi.$
- 2.28. $f(x) = x + 2.$ 1. $(-2; 2).$ 2. $(-2; 4).$ 3. $(0; 2).$
- 2.29. $f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & b < x < c. \end{cases}$ 1. $a = -1, b = 0, c = 1.$
 2. $a = -1, b = 3, c = 5.$
 3. $a = 0, b = 2, c = 4.$
- 2.30. $f(x) = \begin{cases} \pi, & a < x < b, \\ x, & b < x < c. \end{cases}$ 1. $a = -\pi, b = 0, c = \pi.$
 2. $a = -1, b = 1, c = 2.$
 3. $a = 0, b = \pi, c = 2\pi.$

3. Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$, заданную на периоде. Найти спектральную плотность, амплитудный и фазовый спектры (графики функций и спектров построить). Вычислить среднюю мощность P сигнала за период.

- 3.1. $f(x) = 2 - x, \quad x \in (0; 2),$ 3.2. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0; 2), \\ -2, & x \in (-2; 0), \end{cases}$
 $f(x+2) = f(x).$ $f(x+4) = f(x).$
- 3.3. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0; 1), \\ 0, & x \in (1; 2), \end{cases}$ 3.4. $f(x) = 2x, \quad x \in (-1; 3),$
 $f(x+2) = f(x).$ $f(x+4) = f(x).$

- 3.5. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-1; 0), \\ 0, & x \in (0; 3), \end{cases}$
 $f(x+4) = f(x).$
- 3.7. $f(x) = x - 1, \quad x \in (-1; 1),$
 $f(x+2) = f(x).$
- 3.9. $f(x) = 1 - x, \quad x \in (-\pi; \pi),$
 $f(x+2\pi) = f(x).$
- 3.11. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; 3), \\ 0, & x \in (3; 6), \end{cases}$
 $f(x+6) = f(x).$
- 3.13. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi; 0), \\ 1, & x \in (0; \pi), \end{cases}$
 $f(x+2\pi) = f(x).$
- 3.15. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1; 1), \\ 1, & x \in (1; 3), \end{cases}$
 $f(x+4) = f(x).$
- 3.17. $f(x) = x + 2, \quad x \in (-2; 2),$
 $f(x+4) = f(x).$
- 3.19. $f(x) = x, \quad x \in (0; 4),$
 $f(x+4) = f(x).$
- 3.21. $f(x) = 2 - |x|, \quad x \in (-2; 2),$
 $f(x+4) = f(x).$
- 3.23. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (-1; 0), \\ 1-x, & x \in (0; 1), \end{cases}$
 $f(x+2) = f(x).$
- 3.25. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0; 1), \\ 0, & x \in (1; 2), \end{cases}$
 $f(x+2) = f(x).$
- 3.6. $f(x) = x + 1, \quad x \in (-\pi; \pi),$
 $f(x+2\pi) = f(x).$
- 3.8. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi; 0), \\ 2, & x \in (0; \pi), \end{cases}$
 $f(x+2\pi) = f(x).$
- 3.10. $f(x) = 0, 5(x+3), \quad x \in (0; 3),$
 $f(x+3) = f(x).$
- 3.12. $f(x) = |x|, \quad x \in (-\pi; \pi),$
 $f(x+2\pi) = f(x).$
- 3.14. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi/2; 0), \\ 0, & x \in (0; \pi/2), \end{cases}$
 $f(x+\pi) = f(x).$
- 3.16. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (-\pi; 0), \\ 0, & x \in (0; \pi), \end{cases}$
 $f(x+2\pi) = f(x).$
- 3.18. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 1), \\ 0, & x \in (1; 3), \end{cases}$
 $f(x+3) = f(x).$
- 3.20. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0; 2), \\ 0, & x \in (2; 6), \end{cases}$
 $f(x+6) = f(x).$
- 3.22. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2; 2), \\ 0, & x \in (2; 4), \end{cases}$
 $f(x+6) = f(x).$
- 3.24. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 1), \\ 0, & x \in (1; 3), \\ -1, & x \in (3; 4), \end{cases}$
 $f(x+4) = f(x).$
- 3.26. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 0), \\ -1, & x \in (0; 1), \end{cases}$
 $f(x+2) = f(x).$

$$3.27. \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1; 0), \\ 1, & x \in (0; 1), \\ 0, & x \in (1; 3), \end{cases} \quad 3.28. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-1; 0), \\ 1, & x \in (0; 1), \end{cases}$$

$$f(x+4) = f(x).$$

$$f(x+2) = f(x).$$

$$3.29. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-2; -1), \\ 0, & x \in (-1; 1), \\ 1, & x \in (1; 2), \end{cases} \quad 3.30. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0; 1), \\ 1, & x \in (1; 2), \\ 0, & x \in (2; 4), \end{cases}$$

$$f(x+4) = f(x).$$

$$f(x+4) = f(x).$$

4. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)$. Записать их обратные преобразования. Построить графики функции и обратных преобразований.

$$4.1. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad 4.2. \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$4.3. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0; 1), \\ 1, & x \in (1; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad 4.4. \quad f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$4.5. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad 4.6. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$4.7. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x > \pi. \end{cases} \quad 4.8. \quad f(x) = \begin{cases} 4x-1, & x \in (0; 0,25), \\ 0, & x > 0,25. \end{cases}$$

$$4.9. \quad f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (0; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad 4.10. \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (0; 0,5), \\ 0, & x > 0,5. \end{cases}$$

$$4.11. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0; \pi/2), \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases} \quad 4.12. \quad f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$4.13. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad 4.14. \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$4.15. \quad f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in (0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad 4.16. \quad f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \in (0; 1,5), \\ 0, & x > 1,5. \end{cases}$$

$$4.17. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0; 1), \\ 1-x, & x \in (1; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad 4.18. \quad f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (0; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

$$4.19. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0; 3), \\ 0, & x > 3. \end{cases} \quad 4.20. \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$4.21. \quad f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (0; 0,5), \\ 0, & x > 0,5. \end{cases} \quad 4.22. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \in (0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
4.23. \quad f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in (0; 0,5), \\ 0, & x > 0,5. \end{cases} & 4.24. \quad f(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x > \pi. \end{cases} \\
4.25. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 1), \\ 1-x, & x \in (1; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases} & 4.26. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 1), \\ 0, & x \in (1; 2), \\ -1, & x \in (2; 3), \\ 0, & x > 3. \end{cases} \\
4.27. \quad f(x) = \begin{cases} 2, & x \in (0; \pi), \\ x, & x \in (\pi; 2\pi), \\ 0, & x > 2\pi. \end{cases} & 4.28. \quad f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (0; 1), \\ x, & x \in (1; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases} \\
4.29. \quad f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x > \pi. \end{cases} & 4.30. \quad f(x) = \begin{cases} 2x-4, & x \in (0; 2), \\ 0, & x > 2. \end{cases}
\end{array}$$

5. Найти прямое преобразование Фурье, спектральную плотность, амплитудный и фазовый спектры функции $f(x)$. Построить графики функции, амплитудного и фазового спектров. Записать обратное преобразование Фурье. Найти автокорреляционную функцию $k(\tau)$ и энергию E функции (сигнала) $f(x)$:

$$\begin{array}{ll}
5.1. \quad f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} & 5.2. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 2), \\ 0, & x \notin (0; 2). \end{cases} \\
5.3. \quad f(x) = \begin{cases} 1-x, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} & 5.4. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \\
5.5. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 1 < |x| < 2, \\ 0, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} & 5.6. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1; 0), \\ -1, & x \in (0; 1), \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \\
5.7. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} & 5.8. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} \\
5.9. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \notin (0; \pi). \end{cases} & 5.10. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \notin (0; \pi). \end{cases} \\
5.11. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0; \pi/2), \\ 0, & x \notin (0; \pi/2). \end{cases} & 5.12. \quad f(x) = e^{-2|x|}, \quad x \in (-\infty; \infty) \\
5.13. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0; 2\pi), \\ 0, & x \notin (0; 2\pi). \end{cases} & 5.14. \quad f(x) = \begin{cases} 5, & x \in (0; 3), \\ 0, & x \notin (0; 3). \end{cases} \\
5.15. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \notin (0; \pi). \end{cases} & 5.16. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; 4), \\ 0, & x \notin (0; 4). \end{cases} \\
5.17. \quad f(x) = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} & 5.18. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
5.19. \quad f(x) &= \begin{cases} 1, & 1 < |x| < 3, \\ 0, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 3. \end{cases} & 5.20. \quad f(x) &= \begin{cases} 2, & x \in (-2; 0), \\ -2, & x \in (0; 2), \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} \\
5.21. \quad f(x) &= \begin{cases} \cos 2x, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} & 5.22. \quad f(x) &= \begin{cases} \sin x, & |x| < 2\pi, \\ 0, & |x| > 2\pi. \end{cases} \\
5.23. \quad f(x) &= \begin{cases} \sin 2x, & x \in (0; 2\pi), \\ 0, & x \notin (0; 2\pi). \end{cases} & 5.24. \quad f(x) &= \begin{cases} \cos 2x, & x \in (0; \pi/2), \\ 0, & x \notin (0; \pi/2). \end{cases} \\
5.25. \quad f(x) &= e^{-|x|} \quad x \in (-\infty; \infty) & 5.26. \quad f(x) &= \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \\
5.27. \quad f(x) &= \begin{cases} -e^x, & x \in (-1; 0), \\ e^{-x}, & x \in (0; 1), \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} & 5.28. \quad f(x) &= \begin{cases} -e^{-x}, & x > 0, \\ e^x, & x < 0. \end{cases} \\
5.29. \quad f(x) &= \begin{cases} -e^x, & x < 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases} & 5.30. \quad f(x) &= \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

6. Решить задачу по теме "Спектральное представление сигналов" из дисциплины "Радиотехнические цепи и сигналы".

6.1. Периодический вещественный сигнал $f(t)$ задан на отрезке $0 \leq t \leq T$ выражением $f(t) = U_0 e^{-\alpha t}$. Найти выражения коэффициентов C_n комплексного ряда Фурье, отвечающего этому сигналу. Вычислить амплитуду пятой гармоники $|A_5|$ при следующих параметрах: $U_0 = 15$, $\alpha T = 3$.

6.2. Периодический сигнал $f(t)$ с периодом T задан на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ выражением $f(t) = U_0 \cos \frac{\pi t}{T}$. Найти выражение для коэффициентов C_n комплексного ряда Фурье этого сигнала. Вычислить амплитуду второй гармоники $|A_2|$, если $U_0 = 25$.

6.3. Периодический сигнал $f(t)$ с периодом T задан на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ выражением $f(t) = U_0 \left(1 - \frac{2}{T}|t|\right)$. Найти выражение для коэффициентов C_n ряда Фурье этого сигнала. Определить среднюю мощность $P_{\text{ср}}$ сигнала за период.

6.4. Осциллограмма видеоимпульса напряжения $f(t)$ на отрезке $0 \leq t \leq \tau$ имеет вид $f(t) = Ae^{-\alpha t}$. Найти спектральную плотность $S(i\omega)$ этого импульса. $A > 0$, $\alpha > 0$.

6.5. Найти сигнал $f(t)$, спектральная плотность которого задана выражением $S(i\omega) = \frac{S_0}{1 + \omega^2 \tau^2}$, где S_0 , τ – некоторые постоянные.

Указание. Использовать методы теории вычетов.

6.6. Определить функцию $f(t)$, описывающую сигнал со спектральной плотностью $S(i\omega) = \frac{A}{(\alpha + i\omega)^3}$, где A – постоянная, $\alpha > 0$.

6.7. Периодический сигнал $f(t)$ с периодом T задан на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ выражением $f(t) = \begin{cases} U_0, & -\frac{\tau}{2} < t < 0, \\ -U_0, & 0 < t < \frac{\tau}{2}, \end{cases} \tau < T$. Найти выражение для коэффициентов C_n ряда Фурье этого сигнала.

6.8. Прямоугольные видеоимпульсы положительной полярности, образующие бесконечную последовательность с периодом T , имеют амплитуду U_0 . Длительность каждого импульса равна $\frac{T}{3}$, точка $t=0$ совпадает с серединой импульса. Вычислить коэффициент C_1 комплексного ряда Фурье этого импульса.

6.9. Осциллограмма периодического сигнала $f(t)$ периода T на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ задана выражением $f(t) = \frac{2U_0}{T}t$. Найти выражения для коэффициентов C_n комплексного ряда Фурье. Записать явное выражение этого сигнала в виде суммы гармонических колебаний с кратными частотами.

6.10. Сигнал представляет собой периодическую последовательность прямоугольных импульсов с периодом T и амплитудой U_0 . Длительность каждого импульса равна $\frac{T}{5}$, точка $t=0$ совпадает с серединой импульса. Во сколько раз полная средняя мощность больше мощности постоянной составляющей этого сигнала?

6.11. Найти спектральную плотность $S(i\omega)$ треугольного видеоимпульса $f(t)$, если $f(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau}t, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t < 0, t > \tau. \end{cases}$ Определить значение спектральной плотности на частоте $\omega=0$.

6.12. Найти аналитическое выражение для автокорреляционной функции $k(\tau)$ двустороннего экспоненциального видеоимпульса $f(t) = Be^{-\beta|t|}$, где B – постоянное число, $\beta > 0$.

6.13. Вычислить энергию E_u и норму $\|u\|$ экспоненциального видеоимпульса $u(t) = 30e^{-10^5 t} \cdot h(t)$.

6.14. Найти спектральную плотность $F(i\omega)$ сигнала

$$f(t) = \begin{cases} -U_0, & -\frac{3T}{2} \leq t \leq -\frac{T}{2}, \\ U_0, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ -U_0, & \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{3T}{2}. \end{cases}$$

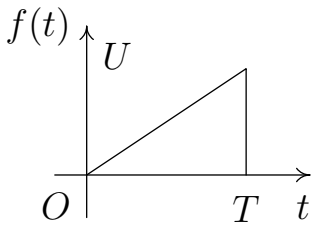


Рис. 1.49

6.15. Сигнал $f(t)$ представляет собой периодическую последовательность пилообразных импульсов с периодом T , изображенных на рис. 1.49. Вычислить комплексные амплитуды первых пяти гармоник этого сигнала.

6.16. Сигнал $f(t)$ характеризуется энергетическим спектром вида $S^2(\omega) = \begin{cases} W_0, & |\omega| < \omega_B \\ 0, & |\omega| > \omega_B. \end{cases}$

Найти автокорреляционную функцию $k(\tau)$ этого сигнала и построить ее график.

6.17. Экспоненциальный импульс тока $i(t) = I_0 e^{-\beta t} h(t)$ протекает через сопротивление R . Какая доля всей энергии импульса выделяется в сопротивлении R за время $1/\beta$? Какая доля всей энергии сосредоточена в полосе частот $(0-\beta)$?

6.18. Найти сигнал $f(t)$, которому отвечает спектральная плотность $S(i\omega) = \frac{A}{(\omega - \omega_0 - i\alpha)(\omega + \omega_0 - i\alpha)}$, где A , ω_0 , α – положительные числа.

6.19. Найти сигнал $f(t)$, заданный своей спектральной плотностью $S(i\omega) = \frac{A}{(\alpha + i\omega)(\beta + i\omega)}$, где $\beta > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq \beta$ – положительные числа.

6.20. Импульсное колебание задано формулой $f(t) = 15e^{-10^7 t} h(t)$. Определить граничную частоту $f_{гр}$ (Гц) таким образом, чтобы в интервале частот $(0, f_{гр})$ было сосредоточено 90 % всей энергии импульса.

6.21. Экспоненциальный видеоимпульс тока задан выражением $i(t) = 0,75e^{-4 \cdot 10^7 t} h(t)$. Найти амплитудный и фазовый спектры на частоте $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10$ МГц.

6.22. Спектральная плотность сигнала $f(t)$ задана выражением $F(i\omega) = \begin{cases} S_0 e^{-\alpha|\omega|}, & |\omega| < \omega_B, \\ 0, & |\omega| > \omega_B, \end{cases}$ где S_0 , α , ω_B – положительные числа. Найти соответствующий сигнал.

6.23. Спектральная плотность сигнала $f(t)$ задана как $F(i\omega) = S_0 e^{-b\omega} h(\omega)$. Найти соответствующий сигнал.

6.24. Найти связь между коэффициентами C_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, комплексного ряда Фурье периодического сигнала $f(t)$ и коэффициентами \tilde{C}_n ряда Фурье сигнала $\tilde{f}(t) = f(t - t_0)$, полученного из исходного сигнала $f(t)$ путем сдвига его во времени на t_0 секунд.

6.25. Комплексный периодический сигнал $f(t)$ на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ имеет вид $f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$. Доказать, что если функция $f_1(t)$ четная, а $f_2(t)$ нечетная, то коэффициенты C_n ряда Фурье при любом n являются вещественными числами.

6.26. Вычислить свертку экспоненциальных импульсов $f_1(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} h(t)$ и $f_2(t) = A_2 e^{-\alpha_2 t} h(t)$ двумя способами: а) прямым нахождением интеграла свертки; б) с помощью теоремы о преобразовании Фурье свертки

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(i\omega) F_2(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \\ = \hat{F}^{-1}[F_1(i\omega) F_2(i\omega)], \text{ где } \hat{F}[f_1(t)] = F_1(i\omega), \hat{F}[f_2(t)] = F_2(i\omega).$$

6.27. На какой частоте значение модуля спектральной плотности импульса $f(t) = 10e^{-10^3 t} h(t)$ уменьшится в 10 раз по сравнению со значением модуля спектральной плотности при $\omega = 0$?

6.28. Доказать, что при $n \rightarrow \infty$ дельта-функция $\delta(t)$ служит пределом последовательности функций: а) $f_n(t) = \frac{n}{2} e^{-n|t|}$; б) $f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-nt^2/2}$.

6.29. Даны два сигнала: прямоугольный видеоимпульс $u(t) = U_0(h(t) - h(t - t_u))$ и экспоненциальный импульс $v(t) = U_0 e^{-\alpha t} h(t)$ (параметры U_0 , α , t_u — положительные числа). Считая длительность t_u фиксированной, найти величину параметра α , при которой расстояние (отклонение) $\rho(u, v) = \|u - v\|$ минимально.

6.30. Сигнал $f(t) = t^2$ существует на отрезке времени $0 \leq t \leq 1$. Найти приближение к этому сигналу с помощью линейной функции $u(t) = At + B$, наилучшее в смысле минимума расстояния (отклонения) $\rho(f, u) = \|f - u\|$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

2.1. Функция-оригинал

Определение 2.1. Функцией-оригиналом будем называть любую комплекснозначную функцию $f(t)$ действительной переменной t , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(t) = 0$ при всех $t < 0$;
- 2) функция $f(t)$ при $t \in [0; \infty)$ непрерывна, кроме отдельных точек, в которых она терпит разрывы первого рода, причем на каждом конечном интервале таких точек конечное число;
- 3) $f(t)$ возрастает не быстрее некоторой экспоненты, т. е. существуют такие положительные константы M и s_0 , что для всех t имеет место неравенство $|f(t)| < M e^{s_0 t}$.

Число s_0 будем называть показателем роста $f(t)$. Для всех функций $f(t)$, ограниченных при $t \geq 0$, можно принять $s_0 = 0$.

Для большинства функций $f(t)$, описывающих физические процессы, развивающиеся во времени t , условия 2 и 3, очевидно, выполняются. Условие 1 также является естественным при решении дифференциальных уравнений с начальными условиями. В таких задачах вся информация о процессе до начала момента $t = 0$ содержится в начальных данных.

Условимся обозначать символом $f(0)$ предел справа $f(t)$ при $t \rightarrow 0$

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

Предел слева $\lim_{t \rightarrow -0} f(t) = 0$ по условию 1.

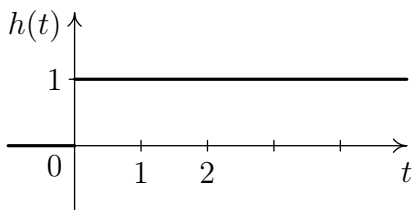


Рис. 2.1

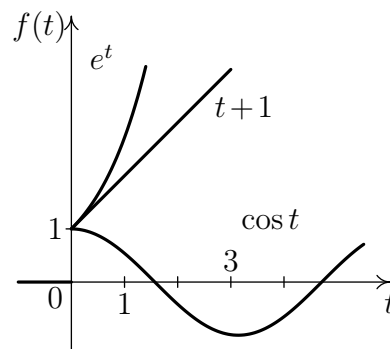


Рис. 2.2

Простейшим примером функции-оригинала является единичная

функция Хевисайда (рис. 2.1)

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

так как она удовлетворяет условиям 1–3.

Очевидно, что всякая функция $f(t)$, подчиняющаяся условиям 2 и 3, после умножения на $h(t)$ становится функцией-оригиналом. Например: $h(t) \cos t$, $h(t)e^t$, $(t+1)h(t)$ (рис. 2.2).

В дальнейшем для сокращения записей будем заменять множитель $h(t)$ на 1 и вместо $h(t) \sin \omega t$ будем писать $\sin \omega t$, условившись, что всегда все рассматриваемые функции равны нулю при отрицательных t . Если хотя бы одно из условий 1–3 не выполнено, то $f(t)$ не является функцией-оригиналом. Например, функции $\frac{1}{t}$, $\operatorname{tg} \omega t$, $\sin \frac{1}{t}$ не являются функциями-оригиналами, так как имеют разрывы второго рода на промежутке $t \in [0; \infty)$. Функция e^{t^2} не является функцией-оригиналом, потому, что при всех $t > s_0$ условие 3 не выполняется: $e^{t^2} > M e^{s_0 t} = e^{s_0 t + \ln M}$.

2.2. Преобразование Лапласа. Интеграл Лапласа

Определение 2.2. Пусть $p = \sigma + i\tau$ – комплексная переменная, $f(t)$ – функция-оригинал. Рассмотрим несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow +0}} \int_{\varepsilon}^a f(t)e^{-pt} dt, \quad (2.1)$$

где $\varepsilon \rightarrow +0$ означает правый предельный переход.

Функцию комплексной переменной $F(p)$ будем называть преобразованием Лапласа функции $f(t)$ или изображением по Лапласу функции $f(t)$. Факт, что функции $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$, будем обозначать таким образом:

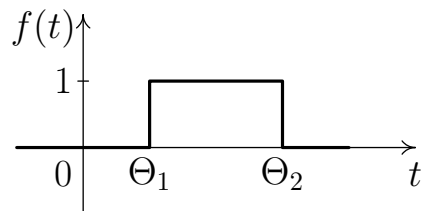


Рис. 2.3

$$f(t) \doteq F(p), \quad F(p) \doteq f(t), \quad L[f(t)] = F(p).$$

Пример 2.1. Найти $F(p)$ для ступенчатой функции $f(t)$, изображенной на рис. 2.3, по определению (2.1).

Решение. Зададим функцию аналитически:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < \Theta_1, \\ 1, & \Theta_1 \leq t \leq \Theta_2, \\ 0, & t > \Theta_2. \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_{\Theta_1}^{\Theta_2} = -\frac{1}{p}(e^{-p\Theta_2} - e^{-p\Theta_1}).$$

Пример 2.2. Найти $F(p)$, если $f(t) = h(t)e^{at}$, где a произвольная комплексная константа $a = \alpha + i\beta$, $\operatorname{Re} p = \sigma > \alpha$.

Решение. По определению (2.1)

$$\begin{aligned} F(p) = L[f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = \\ &= -\frac{1}{p-a} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-(p-a)b} - 1) = \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-a} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(p-a)b}. \end{aligned}$$

Поскольку $p = \sigma + i\tau$, $a = \alpha + i\beta$, то $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(p-a)b} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-\alpha)b} e^{-i(\tau-\beta)b} = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-\alpha)b} \lim_{b \rightarrow \infty} (\cos(\tau-\beta)b - i \sin(\tau-\beta)b)$. Так как $\sigma - \alpha > 0$, то $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-\alpha)b} = 0$.

Итак, окончательно имеем

$$L[h(t)e^{at}] = \frac{1}{p-a}.$$

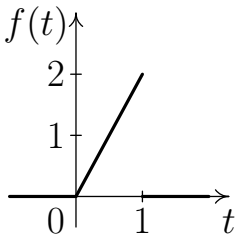


Рис. 2.4

При $a = 0$, $e^{at} = 1$, тогда $L[h(t)] = \frac{1}{p}$.

Пример 2.3. Найти изображение функции $f(t)$, заданной на рис. 2.4.

Решение. Так как

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

то

$$F(p) = \int_0^1 2te^{-pt} dt = -\frac{2}{p} \int_0^1 t de^{-pt} = -\frac{2}{p} \left(te^{-pt} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-pt} dt \right) =$$

$$= -\frac{2}{p} \left(e^{-p} + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1) \right) = \frac{2}{p^2} (1 - e^{-p}(p+1)).$$

Несобственный интеграл в формуле (2.1) называется интегралом Лапласа. Установим для каких функций $f(t)$ интеграл (2.1) сходится, иначе говоря, – для каких $f(t)$ существуют их изображения по Лапласу $F(p)$. Ответ на это дает теорема 2.1.

Теорема 2.1. Если $f(t)$ является функцией-оригиналом, то интеграл Лапласа (2.1) сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, и в этой полуплоскости изображение $F(p)$ является аналитической функцией.

Доказательство. Действительно, при $\operatorname{Re} p = \sigma > s_0$ (рис. 2.5) интеграл (2.1) сходится абсолютно и равномерно, это следует из теоремы 2.24 и оценок

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt &< \int_0^{\infty} M e^{s_0 t} \cdot e^{-\sigma t} |\cos \tau t - i \sin \tau t| dt = \\ &= M \int_0^{\infty} e^{(s_0 - \sigma)t} dt = M \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{e^{(s_0 - \sigma)t}}{s_0 - \sigma} \Big|_0^a = \frac{M}{\sigma - s_0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Итак,

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt < \frac{M}{\sigma - s_0}. \quad (2.3)$$

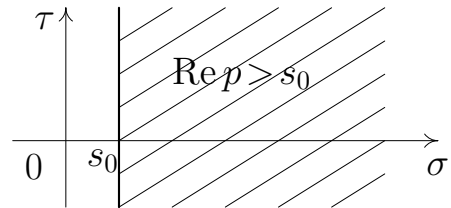


Рис. 2.5

Продифференцируем формально по p интеграл в правой части формулы (2.1). Формально получим

$$\frac{dF(p)}{dp} = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.4)$$

Для интеграла в правой части последнего равенства справедлива оценка

$$\left| \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |t f(t) e^{-pt}| dt < \int_0^{\infty} t M e^{s_0 t} e^{-\sigma t} dt = M \int_0^{\infty} t e^{-(\sigma - s_0)t} dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\left| \int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt \right| < M \int_0^{\infty} t e^{-(\sigma - s_0)t} dt = \frac{M}{(\sigma - s_0)^2}.$$

Из этого следует, что интеграл в правой части равенства (2.4) сходится абсолютно и равномерно, т. е. производная $\frac{dF(p)}{dp}$ существует в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. **Т е о р е м а д о к а з а н а.**

Следует отметить, что интеграл Лапласа (2.1) определяет изображение $F(p)$ лишь в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Однако во многих случаях область определения изображения $F(p)$ намного шире, например, функция $F(p) = L[e^{at}] = \frac{1}{p-a}$ определена при всех $p \neq a$.

Следствие. Если $p \rightarrow \infty$ так, что $\operatorname{Re} p = \sigma$ неограниченно возрастает, то

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \sigma \rightarrow \infty}} F(p) = 0. \quad (2.5)$$

Это вытекает из неравенства (2.3)

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \sigma \rightarrow \infty}} |F(p)| = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \sigma \rightarrow \infty}} \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| < \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{M}{\sigma - s_0} = 0. \quad (2.6)$$

Очевидно, что $\operatorname{Re} p > 0$, если точка p лежит в правой полуплоскости. Отсюда следует, что $F(p) \rightarrow 0$, если $p \rightarrow \infty$, оставаясь внутри любого угла $-\frac{\pi}{2} + \alpha < \arg p < \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha > 0$, сколь угодно мало, причем эта сходимость равномерна относительно $\arg p$. В частности, если $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке, то $F(p) \rightarrow 0$ при стремлении p к ∞ по любому пути. Значит, $F(p)$ должна иметь нуль в бесконечности.

2.3. Теорема обращения

Теорема 2.2. Если для функции-оригинала $f(t)$, $F(p)$ является изображением, то в любой точке t , где $f(t)$ непрерывна, справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (2.7)$$

здесь интеграл берут вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = a > s_0$ и понимают в смысле главного значения, т. е.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} F(p) e^{pt} dp.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим на отрезке $[0; T]$ произвольную функцию-оригинал $f(t)$ и соответствующую ей ступенчатую функцию $f_n(t)$ (рис. 2.6), определенную в точках $0 = \Theta_0 < \Theta_1 < \Theta_2 < \dots < \Theta_n = T$ равенством

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\Theta_k)[h(t - \Theta_k) - h(t - \Theta_{k+1})]. \quad (2.8)$$

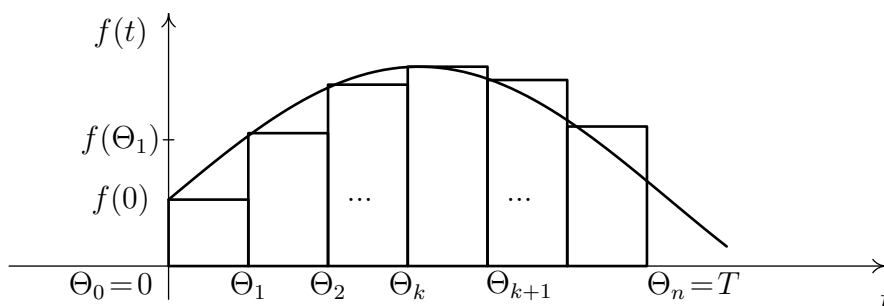


Рис. 2.6

При $t = \Theta_k$, $f_n(\Theta_k) = f(\Theta_k)$. Обозначим через $I(t)$ интеграл

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp, \quad (2.9)$$

взятый вдоль прямой $\operatorname{Re} p = a > 0$, проходимой снизу вверх. Проведем окружность $|p| = R$ и обозначим через $a + ib$, $a - ib$ точки ее пересечения с прямой $\operatorname{Re} p = a$; C_R , C_R^1 — дуги окружности слева и справа от прямой (рис. 2.7). Предположим, что $t > 0$. Если $R \rightarrow \infty$, то $\frac{1}{p} \rightarrow 0$ равномерно относительно $\arg p$, тогда по лемме Жордана в силу равенства (2.23)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0. \quad (2.10)$$

Функция $\frac{e^{pt}}{p}$ имеет единственный полюс при $p = 0$. По теореме Коши о вычетах для замкнутого контура, образованного хордой $a - ib$, $a + ib$ и дугой C_R , получаем

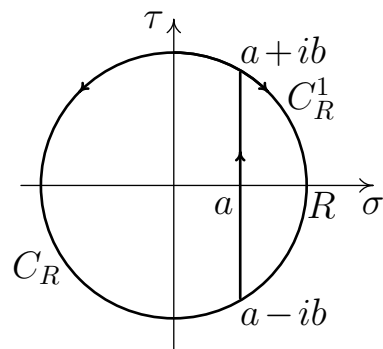


Рис. 2.7

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{C_R} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{pt}}{p} \Big|_{p=0} = 2\pi i \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pe^{pt}}{p} = 2\pi i. \quad (2.11)$$

Переходя к пределу в выражении (2.11) при $R \rightarrow \infty$, а значит, и при $b \rightarrow \infty$, с учетом формулы (2.10), имеем

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = 2\pi i. \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1. \quad (2.13)$$

Если $t < 0$, то по той же лемме Жордана и равенству (2.24)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^1} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0. \quad (2.14)$$

В правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ функция $\frac{e^{pt}}{p}$ аналитична, поэтому по теореме Коши интеграл по замкнутому контуру, образованному дугой C_R^1 и хордой, равен нулю при любых $R > a$:

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp + \int_{C_R^1} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0 \quad (2.15)$$

Поэтому, с учетом равенства (2.14), при $R \rightarrow \infty$ из (2.15) имеем

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p} dp = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = 0. \quad (2.16)$$

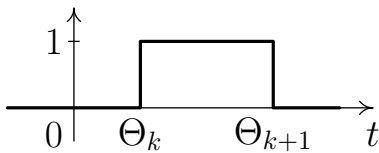


Рис. 2.8

Следовательно, если $t < 0$, то $I(t) = 0$. Итак, мы установили, что интеграл (2.9) равен единичной функции $h(t)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Если в формуле (2.17) t заменить на $t - \Theta$, то получим

$$h(t - \Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{p(t-\Theta)}}{p} dp. \quad (2.18)$$

Приравняем в формуле (2.18) $\Theta = \Theta_k$, потом $\Theta = \Theta_{k+1}$ и, вычитая из первого интеграла второй, получим описание одной ступеньки единичной высоты на отрезке $[\Theta_k; \Theta_{k+1}]$ (рис. 2.8):

$$h(t - \Theta_k) - h(t - \Theta_{k+1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-p\Theta_k} - e^{-p\Theta_{k+1}}}{p} dp. \quad (2.19)$$

Подставив формулу (2.19) в (2.8), представим ступенчатую функцию $f_n(t)$ интегралом

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\Theta_k) \frac{e^{-p\Theta_k} - e^{-p\Theta_{k+1}}}{p} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \sum_{k=0}^{n-1} f(\Theta_k) \frac{1 - e^{-p(\Theta_{k+1} - \Theta_k)}}{p} e^{-p\Theta_k} dp. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Обозначим $\Delta\Theta_k = \Theta_{k+1} - \Theta_k$ и будем увеличивать n так, чтобы все разности $\Delta\Theta_k \rightarrow 0$. Заменим в формуле (2.20) бесконечно малую $1 - e^{-p\Delta\Theta_k}$ на эквивалентную ей $p\Delta\Theta_k$ при $\Delta\Theta_k \rightarrow 0$, тогда

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(\Theta_k) e^{-p\Theta_k} \Delta\Theta_k \right] dp. \quad (2.21)$$

Сумма в квадратных скобках – это интегральная сумма для функции $f(t)e^{-pt}$ на отрезке $[0; T]$. При $n \rightarrow \infty$ $f_n(t) \rightarrow f(t)$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\Theta_k) e^{-p\Theta_k} \Delta\Theta_k = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt,$$

поэтому из формулы (2.21) следует, что

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\int_0^T f(t) e^{-pt} dt \right) e^{pt} dp, \quad 0 < t < T. \quad (2.22)$$

Перейдем во внутреннем интеграле к пределу при $T \rightarrow \infty$. Этот предел существует, так как $f(t)$ – оригинал:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

что и доказывает теорему.

Формула (2.7) называется обратным преобразованием Лапласа, а интеграл в ее правой части интегралом Меллина. Символически обратное преобразование обозначим $f(t) = L^{-1}[F(p)]$.

Для справки приводим формулировку леммы Жордана [16].

Лемма. Если на дуге окружности $C_R: |p| = R$, $\operatorname{Re} p < a$ (рис. 2.7) функция $F(p)$ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$ равномерно относительно $\arg p$, то для любого положительного t

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ t > 0}} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0. \quad (2.23)$$

В тех же условиях для любого отрицательного t

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ t < 0}} \int_{C_R^1} F(p) e^{pt} dp = 0, \quad (2.24)$$

где C_R^1 – дуга окружности $|p| = R$, $\operatorname{Re} p > a$.

Теперь перейдем к изучению свойств преобразования Лапласа.

2.4. Свойство линейности

Свойство линейности гласит, что при любых постоянных α, β имеет место равенство

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)]. \quad (2.25)$$

Свойство (2.25) следует из определения преобразования Лапласа (2.1) и свойств определенных интегралов.

Пример 2.4. Найти изображение для $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$.

Решение. Используя формулу Эйлера, запишем

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad \sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}).$$

В соответствии (см. пример 2.2) $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$ примем $a = \pm i\omega$, тогда

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{2}(L[e^{i\omega t}] + L[e^{-i\omega t}]) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad (2.26)$$

$$L[\sin \omega t] = \frac{1}{2i}(L[e^{i\omega t}] - L[e^{-i\omega t}]) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.27)$$

Справедливо также утверждение, обратное свойству (2.25), вытекающее из формулы (2.7). Если $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$, то

$$L^{-1}[\alpha F(p) + \beta G(p)] = \alpha f(t) + \beta g(t), \quad (2.28)$$

где α, β – любые константы (в общем случае, комплексные).

Здесь важно отметить, что слагаемые $\alpha F(p)$ и $\beta G(p)$ должны быть изображениями потому, что если $\alpha F(p) + \beta G(p)$ изображение, то $\alpha F(p)$ и $\beta G(p)$ могут таковыми и не быть. Например, (см. пример 2.16)

$$\frac{e^{2t} - e^{3t}}{t} \doteq \ln \frac{p-3}{p-2} = \ln(p-3) - \ln(p-2),$$

но $\ln(p-3)$ и $\ln(p-2)$ не являются изображениями.

Пример 2.5. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p-1)}$.

Решение. Раскладывая $F(p)$ на сумму простейших дробей, по свойству (2.28) получим

$$\frac{p}{(p+1)(p-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} \doteq \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t = \operatorname{ch} t.$$

2.5. Теорема подобия

Теорема 2.3. Если $L[f(t)] = F(p)$, то для любого $a > 0$

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (2.29)$$

Доказательство. Действительно, по определению,

$$L[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at) e^{-pt} dt.$$

Обозначим $at = s$, тогда $t = \frac{s}{a}$, $dt = \frac{ds}{a}$, и

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(s) e^{-ps/a} ds = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Теорема подобия полезна для сокращения вычислений при совершении обратного преобразования Лапласа, если изображение содержит громоздкие множители. Рассмотрим на это следующем простом примере.

Пример 2.6. Найти $L^{-1} \left[\frac{p}{(p+0,7 \cdot 10^3)(p+0,5 \cdot 10^3)} \right]$.

Решение. Вынесем в изображении за скобки 10^3 , тогда по теореме подобия

$$L^{-1} \left[\frac{1}{10^3} \cdot \frac{\frac{p}{10^3}}{(p/10^3 + 0,7)(p/10^3 + 0,5)} \right] = f(10^3 t),$$

где

$$f(t) \doteq F(p) = \frac{p}{(p+0,7)(p+0,5)}.$$

Разложив $F(p)$ на сумму простых дробей, найдем $f(t)$:

$$\frac{p}{(p+0,7)(p+0,5)} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{p+0,7} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{p+0,5} \doteq \frac{7}{2} e^{-0,7t} - \frac{5}{2} e^{-0,5t} = f(t). \quad (2.30)$$

Тогда искомым оригиналом

$$f(10^3 t) = \frac{7}{2} e^{-0,7 \cdot 10^3 t} - \frac{5}{2} e^{-0,5 \cdot 10^3 t}. \quad (2.31)$$

С физической точки зрения переход от формулы (2.30) к (2.31) равносильен изменению масштаба времени t . Если в формуле (2.30) время измеряется в миллисекундах, то в формуле (2.31) в секундах.

2.6. Теорема запаздывания

Теорема 2.4. Если $L[f(t)] = F(p)$, то для любого $\tau > 0$

$$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p), \quad (2.32)$$

т. е. запаздывание аргумента оригинала на τ равносильно умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

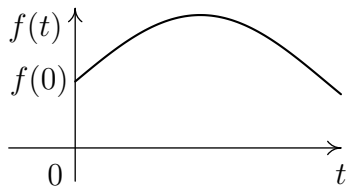


Рис. 2.9

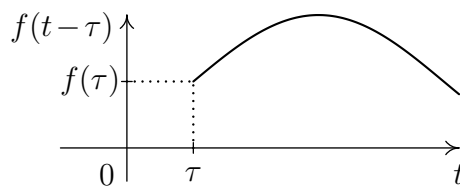


Рис. 2.10

Поясним термин "запаздывание". График $f(t)$ изображен на рис. 2.9, а график $f(t-\tau)$ на рис. 2.10 сдвинут вправо на τ единиц масштаба. Значит, процесс, описываемый функцией $f(t-\tau)$, начинается с отставанием на время τ относительно процесса, описываемого функцией $f(t)$. Отсюда и происходит название теоремы "теорема запаздывания".

Доказательство. Очевидно, что $f(t-\tau)=0$, если $t-\tau < 0$. Поэтому

$$L[f(t-\tau)] = \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

Сделав замену $t-\tau=s$, $ds=dt$, $t=\tau+s$, получим

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} f(s)e^{-ps}e^{-p\tau} ds = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(s)e^{-ps} ds = e^{-p\tau} F(p),$$

что и требовалось доказать.

Теорему удобно применять для отыскания изображений функций, заданных на отдельных промежутках различными аналитическими выражениями.

Пример 2.7. Найти изображение для оригинала, приведенного на рис. 2.11.

Решение. Представим $f(t)$ в виде разности двух функций: $f(t) = g(t) - g(t-3)$, где

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

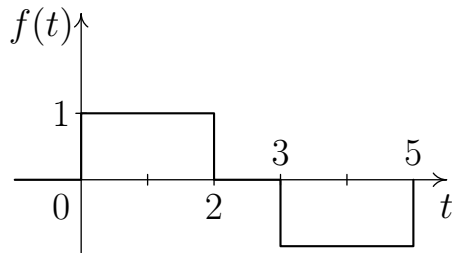


Рис. 2.11

Тогда

$$g(t) \doteq G(p) = \int_0^2 e^{-pt} dt = \frac{1}{p}(1 - e^{-2p}),$$

по теореме запаздывания $g(t-3) \doteq \frac{e^{-3p}}{p}(1 - e^{-2p})$ и

$$F(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-2p}) - \frac{e^{-3p}}{p}(1 - e^{-2p}) = \frac{1}{p}(1 - e^{-2p} - e^{-3p} + e^{-5p}).$$

Пример 2.8. Найти изображение $f(t) = |\sin t|$.

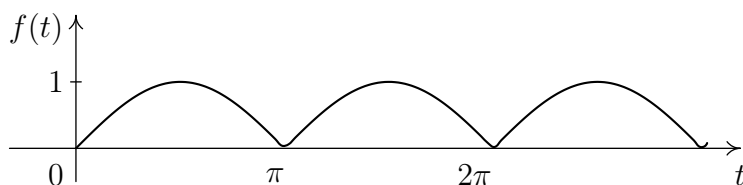


Рис. 2.12

Решение. Функция $f(t)$ периодична с периодом $T = \pi$ (см. рис. 2.12). Обозначим

$$g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & t > \pi, \end{cases} \quad L[g(t)] = G(p).$$

Тогда

$$f(t) = g(t) + g(t - T) + g(t - 2T) + \dots + g(t - kT) + \dots$$

По свойству линейности и теореме запаздывания

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= G(p) + G(p)e^{-pT} + G(p)e^{-2pT} + \dots + G(p)e^{-pkT} + \dots = \\ &= G(p)(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots + e^{-pkT} + \dots). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Поскольку $\operatorname{Re} p = \sigma > 0$, то $|e^{-pT}| = |e^{-T\sigma}(\cos T\tau + i \sin T\tau)| = e^{-T\sigma} < 1$, тогда выражение в скобках в формуле (2.33) – сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-pT}$. Суммировав прогрессию, получим

$$L[f(t)] = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (2.34)$$

Найдем $G(p)$ по определению (2.1):

$$G(p) = \int_0^{\pi} \sin t e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p^2 + 1} (p \sin t + \cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{e^{-p\pi}}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1}.$$

При вычислении интеграла мы использовали формулу из табл. Б.1 прил. Б. Подставим $G(p)$ в формулу (2.34), заменив в ней T на π :

$$L[|\sin t|] = \frac{e^{-p\pi} + 1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-p\pi}} = \frac{e^{-p\pi/2}(e^{p\pi/2} + e^{-p\pi/2})}{e^{-p\pi/2}(e^{p\pi/2} - e^{-p\pi/2})} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{\operatorname{cth} \frac{p\pi}{2}}{p^2 + 1}. \quad (2.35)$$

Очевидно, что по формуле (2.34) можно вычислить изображение любой периодической функции-оригинала с периодом T , заменив $G(p)$ на соответствующее изображение.

2.7. Теорема опережения

Теорема 2.5. Если $F(p) = L[f(t)]$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$L[f(t + \tau)] = e^{p\tau} \left[F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right], \quad (2.36)$$

где τ – любое положительное число.

Доказательство. По определению изображения запишем

$$L[f(t+\tau)] = \int_0^{\infty} f(t+\tau)e^{-pt} dt. \quad (2.37)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $s = t + \tau$, $t = s - \tau$, $dt = ds$, тогда

$$L[f(t+\tau)] = e^{p\tau} \int_{\tau}^{\infty} f(s)e^{-ps} ds. \quad (2.38)$$

Дополним интеграл (2.38) до интеграла Лапласа, прибавив и отняв $e^{p\tau} \int_0^{\tau} f(s)e^{-ps} ds$ к правой части равенства (2.38), тогда

$$\begin{aligned} L[f(t+\tau)] &= e^{p\tau} \left[\int_0^{\tau} f(s)e^{-ps} ds + \int_{\tau}^{\infty} f(s)e^{-ps} ds \right] - e^{p\tau} \int_0^{\tau} f(s)e^{-ps} ds = \\ &= e^{p\tau} \int_0^{\infty} f(s)e^{-ps} ds - e^{p\tau} \int_0^{\tau} f(s)e^{-ps} ds = e^{p\tau} \left[F(p) - \int_0^{\tau} f(s)e^{-ps} ds \right], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Графики функций $f(t)$ и $f(t+\tau)$ изображены на рис. 2.13 и рис. 2.14.

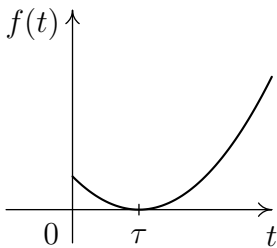


Рис. 2.13

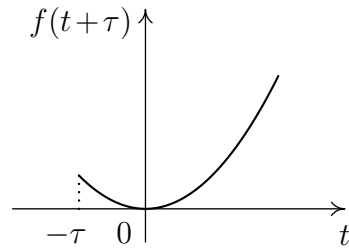


Рис. 2.14

2.8. Теорема затухания

Теорема 2.6. Если $L[f(t)] = F(p)$, то для любого комплексного a

$$L[e^{at} f(t)] = F(p-a), \quad (2.39)$$

т. е. смещение изображения на a равносильно умножению оригинала на e^{at} .

Доказательство. По определению (2.1) запишем

$$L[e^{at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a),$$

что и требовалось доказать.

П р и м е р 2.9. Найти изображение $f(t) = e^t |\sin t|$.

Решение. По формуле (2.35) $|\sin t| \doteq \frac{\operatorname{cth} \frac{p\pi}{2}}{p^2 + 1}$, поэтому по теореме 2.6

$$e^t |\sin t| \doteq \frac{\operatorname{cth} \frac{(p-1)\pi}{2}}{(p-1)^2 + 1}.$$

П р и м е р 2.10. Найти изображение оригиналов $f(t) \cos \omega t$ и $f(t) \sin \omega t$.

Решение. Используя формулу Эйлера, перепишем оригиналы в виде

$$f(t) \cos \omega t = \frac{1}{2} f(t) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad f(t) \sin \omega t = \frac{1}{2i} f(t) (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}).$$

Тогда, по свойству линейности и теореме затухания, находим

$$f(t) \cos \omega t \doteq \frac{1}{2} (F(p - i\omega) + F(p + i\omega)), \quad (2.40)$$

$$f(t) \sin \omega t \doteq \frac{1}{2i} (F(p - i\omega) - F(p + i\omega)) = \frac{i}{2} (F(p + i\omega) - F(p - i\omega)), \quad (2.41)$$

где $F(p) = L[f(t)]$.

2.9. Теорема дифференцирования оригинала

Теорема 2.7. Если функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$ и $\frac{df(t)}{dt}$ является оригиналом, то

$$L \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = pF(p) - f(0), \quad (2.42)$$

где $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ – правосторонний предел.

Доказательство. Действительно, интегрируя по частям в интеграле, задающим изображение производной, получим

$$\begin{aligned}
L \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} - f(0) + pF(p). \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0$. По определению оригинала $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, а $|e^{-pt}| = e^{-\sigma t}$, где $\sigma = \operatorname{Re} p > s_0$. Поэтому $|f(t)e^{-pt}| < Me^{-(\sigma - s_0)t}$. Так как $\sigma - s_0 > 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma - s_0)t} = 0$ и, следовательно, $|f(t)e^{-pt}| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

В частном случае, если $f(0) = 0$, то $\frac{df(t)}{dt} \doteq pF(p)$.

Далее, пусть при $t > 0$ $\frac{df}{dt}$ непрерывна, а $\frac{d^2 f}{dt^2}$ — оригинал. Поскольку $\frac{d^2 f}{dt^2}$ — производная от $\frac{df}{dt}$, то по формуле (2.42) имеем

$$L \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = L \left[\frac{d}{dt} \frac{df}{dt} \right] = pL \left[\frac{df}{dt} \right] - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Подставив сюда $L \left[\frac{df}{dt} \right]$ из формулы (2.42), запишем

$$L \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = p[pF(p) - f(0)] - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} = p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt} \Big|_{t=0}. \quad (2.44)$$

Если же и $\frac{d^n f}{dt^n}$ является оригиналом, то, последовательно применяя правила (2.42) и (2.44) к производным от третьего до n -го порядков, получим

$$L \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} - \dots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}. \quad (2.45)$$

Здесь под $\frac{d^k f}{dt^k} \Big|_{t=0}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, понимается правосторонний предел при $t \rightarrow +0$:

$$\frac{d^k f}{dt^k} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d^k f}{dt^k}. \quad (2.46)$$

Формулы (2.42), (2.44) и (2.45) в дальнейшем будем использовать при решении дифференциальных уравнений.

Пример 2.11. Найти изображение для $\frac{df}{dt}$, если $f(t) = 2e^t \cos^2 \frac{t}{2}$.

Решение. Сделав преобразование $2 \cos^2 \frac{t}{2} = 1 + \cos t$, перепишем оригинал $f(t) = e^t(1 + \cos t) = e^t + e^t \cos t$. Используя известные изображения для e^t , $\cos t$, свойство линейности и теорему затухания, найдем $F(p)$

$$F(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{p-1}{(p-1)^2+1}.$$

Поскольку $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} e^t(1 + \cos t) = 2$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) = \frac{p}{p-1} + \frac{p(p-1)}{(p-1)^2+1} - 2 = \frac{1}{p-1} + \frac{p-2}{(p-1)^2+1}.$$

2.10. Теорема интегрирования оригинала

Теорема 2.8. Если $L[f(t)] = F(p)$, тогда

$$L \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(p)}{p}, \quad (2.47)$$

т. е. интегрирование оригинала сводится к делению его изображения на p .

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt$, $L[\varphi(t)] = \Phi(p)$.

Функция $\varphi(t)$ является первообразной для $f(t)$ и, значит, непрерывна при $t \geq 0$. По определению оригинала $f(t)$ удовлетворяет неравенству $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$, $M > 0$, $s_0 > 0$. Это позволяет сделать оценку для $\varphi(t)$:

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t f(t) dt \right| \leq \int_0^t |f(t)| dt < M \int_0^t e^{s_0 t} dt < \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) < \frac{M}{s_0} e^{s_0 t}.$$

Следовательно, $\varphi(t)$ является оригиналом, причем $\varphi(0) = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = f(t)$. Применив теорему дифференцирования оригинала, запишем

$$L \left[\frac{d\varphi}{dt} \right] = p\Phi(p) = F(p),$$

отсюда $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$, что доказывает формулу (2.47).

Теорема 2.8 позволяет найти оригинал для изображения вида $\frac{F(p)}{p^k}$, где $k=1, 2, \dots$, если известен оригинал для $F(p) \doteq f(t)$. Действительно, по формуле (2.47)

$$\frac{F(p)}{p} \doteq \int_0^t f(t) dt. \quad (2.48)$$

Поделив левую часть равенства (2.48) на p , получим

$$\frac{F(p)}{p^2} \doteq \int_0^t \left(\int_0^t f(t) dt \right) dt. \quad (2.49)$$

Повторяя этот процесс, находим

$$\frac{F(p)}{p^k} \doteq \int_0^t \left(\int_0^t \dots \left(\int_0^t f(t) dt \right) dt \dots \right) dt. \quad (2.50)$$

Пример 2.12. Найти оригинал по изображению $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^3(p^2+1)}$.

Решение. Известно из соответствия (2.27), что $\frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t$, тогда по формулам (2.48)–(2.50)

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \doteq \int_0^t \sin t dt = 1 - \cos t,$$

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} \doteq \int_0^t (1 - \cos t) dt = t - \sin t,$$

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \doteq \int_0^t (t - \sin t) dt = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1 = \frac{t^2}{2} + \cos t - h(t).$$

По теореме запаздывания окончательно находим

$$\frac{e^{-p}}{p^3(p^2+1)} \doteq \frac{(t-1)^2}{2} + \cos(t-1) - h(t-1).$$

2.11. Свертка функций

Определение 2.3. Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция $f(t)$, задаваемая интегралом

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2.51)$$

Действие, выражаемое интегралом (2.51), называют свертыванием и обозначают символом $f_1(t) * f_2(t)$. Операция свертывания коммутативна, то есть справедливо равенство

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau = f_2 * f_1. \quad (2.52)$$

Для проверки этого сделаем в интеграле (2.51) замену переменной интегрирования $s = t - \tau$, $d\tau = -ds$, $\tau = t - s$, тогда

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = - \int_t^0 f_1(t - s) f_2(s) ds = \int_0^t f_1(t - s) f_2(s) ds.$$

Последний интеграл равен интегралу в правой части (2.52), так как обозначение переменной интегрирования не влияет на значение определенного интеграла.

Свертка оригиналов $f_1 * f_2$ тоже является оригиналом, так как интеграл (2.51) – непрерывная функция t , т. е. удовлетворяет условиям 1, 2 определения 2.1 (с. 82). Если обозначить через s_0 общий показатель роста функций f_1 , f_2 , то справедлива оценка

$$\left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right| < M \left| \int_0^t e^{s_0 \tau} e^{s_0(t - \tau)} d\tau \right| = M t e^{s_0 t} < M e^{(s_0 + \varepsilon)t},$$

где ε некоторая положительная сколь угодно малая константа. Следовательно, и третье условие для оригинала в определении 2.1 (с. 82) тоже выполнено.

2.12. Теорема умножения изображений

Теорема 2.9. Пусть $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$. Произведение изображений $F(p)$ и $G(p)$ тоже является изображением, причем

$$L \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right] = F(p) \cdot G(p). \quad (2.53)$$

Доказательство. По определению изображения имеем

$$L \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt. \quad (2.54)$$

Так как свертка является оригиналом, то для нее интеграл Лапласа сходится абсолютно и равномерно, поэтому в интеграле (2.54) по теореме 2.26 (с. 147) можно изменить порядок интегрирования. С другой стороны, повторный интеграл (2.54) – это двойной интеграл по бесконечному сектору D , ограниченному прямыми $\tau=0$, $\tau=t$ (рис. 2.15). При фиксированном t интегрирование в интеграле (2.54) ведется в пределах от $\tau=0$ до $\tau=t$. Изменим в нем порядок интегрирования, тогда

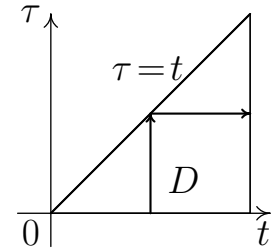


Рис. 2.15

$$L \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt} dt \right) f(\tau) d\tau. \quad (2.55)$$

Сделав замену переменной интегрирования во внутреннем интеграле (2.55) $t-\tau=s$, $dt=ds$, $t=s+\tau$, получим

$$\begin{aligned} L \left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \right] &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(s)e^{-p(s+\tau)} ds \right) f(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau} \left(\int_0^\infty g(s)e^{-ps} ds \right) d\tau = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau} G(p) d\tau = F(p) \cdot G(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема умножения изображений позволяет выполнить обратное преобразование Лапласа для произведения изображений, если известны оригиналы сомножителей.

Пример 2.13. Найти оригинал для

$$\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+4}.$$

Решение. Известно, что

$$F(p) = \frac{p}{p^2+1} \stackrel{::}{=} \cos t, \quad G(p) = \frac{p}{p^2+4} \stackrel{::}{=} \cos 2t.$$

Тогда из теоремы 2.9 следует, что

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(p)G(p)] &= \int_0^t \cos(t-\tau) \cos 2\tau \, d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(t-3\tau) + \cos(t+\tau)] \, d\tau = \frac{2}{3} \sin 2t - \frac{1}{3} \sin t. \end{aligned}$$

2.13. Интеграл Дюамеля

В приложениях часто используют формулы, являющиеся следствием теоремы 2.9, позволяющие выразить оригинал для изображения вида $pF(p)G(p)$ и называемые интегралом Дюамеля.

Пусть $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы, а $F(p)$, $G(p)$ – их соответствующие изображения. Запишем выражение $pF(p)G(p)$ и сделаем тождественные преобразования:

$$pF(p)G(p) = [pF(p) - f(0)]G(p) + f(0)G(p), \quad (2.56)$$

$$pF(p)G(p) = [pG(p) - g(0)]F(p) + g(0)F(p). \quad (2.57)$$

В квадратных скобках в равенстве (2.56) стоит изображение производной $\frac{df}{dt}$, а в формуле (2.57) – изображение $\frac{dg}{dt}$, т. е.

$$pF(p)G(p) = L \left[\frac{df}{dt} \right] G(p) + f(0)G(p), \quad (2.58)$$

$$pF(p)G(p) = L \left[\frac{dg}{dt} \right] F(p) + g(0)F(p). \quad (2.59)$$

Совершая обратные преобразования Лапласа и учитывая, что по формуле (2.53) произведению изображений в правых частях равенств (2.58), (2.59) соответствует свертка их оригиналов, находим

$$L^{-1}[pF(p)G(p)] = \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) \, d\tau + f(0)g(t), \quad (2.60)$$

$$L^{-1}[pF(p)G(p)] = \int_0^t \frac{dg(\tau)}{d\tau} f(t-\tau) d\tau + g(0)f(t). \quad (2.61)$$

Поскольку операция свертывания коммутативна, то из формул (2.60), (2.61) получаем еще два равенства:

$$L^{-1}[pF(p)G(p)] = \int_0^t \frac{df(t-\tau)}{d\tau} g(\tau) d\tau + f(0)g(t), \quad (2.62)$$

$$L^{-1}[pF(p)G(p)] = \int_0^t \frac{dg(t-\tau)}{d\tau} f(\tau) d\tau + g(0)f(t). \quad (2.63)$$

Так как свертка функций по формуле (2.51) при $t=0$ равна нулю, то, используя теорему дифференцирования оригинала, равенства (2.60)–(2.63) можно объединить в одно:

$$L^{-1}[pF(p)G(p)] = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (2.64)$$

Формулы (2.60)–(2.64) часто используются при решении дифференциальных уравнений, описывающих нестационарные процессы в электрических цепях.

2.14. Обобщенная теорема умножения изображений

Теорема 2.10 (Эфроса). Если $F(p) = L[f(t)]$, а для аналитических функций $G(p)$, $q(p)$ справедливо равенство

$$L^{-1}[G(p)e^{-\theta q(p)}] = g(t, \theta), \quad (2.65)$$

тогда

$$L \left[\int_0^{\infty} f(\theta)g(t, \theta) d\theta \right] = F(q(p))G(p). \quad (2.66)$$

Доказательство. Изображение в левой части равенства (2.66)

$$L \left[\int_0^{\infty} f(\theta)g(t, \theta) d\theta \right] = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\theta)g(t, \theta) d\theta \right) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g(t, \theta) e^{-pt} dt \right) f(\theta) d\theta. \quad (2.67)$$

Здесь мы предполагаем, что можно изменить порядок интегрирования. Внутренний интеграл в правой части равенства (2.67) является изображением функции $g(t, \theta)$, следовательно, учитывая формулу (2.65), можно написать следующее:

$$\begin{aligned} L \left[\int_0^{\infty} f(\theta) g(t, \theta) d\theta \right] &= \int_0^{\infty} G(p) f(\theta) e^{-\theta q(p)} d\theta = \\ &= G(p) \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-\theta q(p)} d\theta = F(q(p)) G(p), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

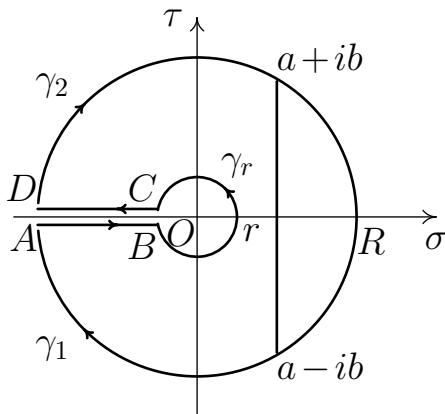


Рис. 2.16

В частности, если $q(p) = p$, то по формуле (2.65) $g(t, \theta) = G(p) e^{-p\theta}$. Отсюда по теореме запаздывания получаем $g(t, \theta) = g(t - \theta)$ и равенство (2.66) превращается в равенство (2.53).

Теорема Эфроса полезна при нахождении оригинала по формуле обращения (2.7).

Пример 2.14. Найти $g(t, \theta)$, если $G(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, и вычислить оригинал для $\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}}$, $\alpha > 0$.

Решение. Применив формулу обращения (2.7), равенство (2.65) запишем в виде

$$g(t, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}}. \quad (2.68)$$

Для вычисления этого интеграла проведем две окружности: $|p| = R$, $|p| = r$, $R > r$ и сделаем разрез комплексной плоскости вдоль отрицательной части действительной оси $O\sigma$.

Рассмотрим замкнутый контур Γ , образованный отрезком $a - ib$, $a + ib$, дугами γ_1 , γ_2 окружности $|p| = R$, дугой окружности γ_r радиуса

r и краями разреза AB и CD (рис. 2.16). Внутри контура Γ $|\arg p| < \pi$, а функция $\frac{e^{-\theta\sqrt{p}+pt}}{\sqrt{p}}$ является аналитической и однозначной, поэтому по теореме Коши

$$\oint_{\Gamma} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} = 0. \quad (2.69)$$

Следовательно, интеграл от $\frac{e^{-\theta\sqrt{p}+pt}}{\sqrt{p}}$ вдоль отрезка $a - ib$, $a + ib$ равен сумме интегралов по остальным частям контура Γ , проходимым в направлениях, указанных на рис. 2.16.

$$\begin{aligned} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} &= \int_{\gamma_1} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} + \int_{AB} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} + \\ &+ \int_{\gamma_r} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} + \int_{CD} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} + \int_{\gamma_2} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Поскольку $\theta > 0$, то на дугах γ_1, γ_2 функция $\frac{e^{-\theta\sqrt{p}+pt}}{\sqrt{p}} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, по лемме Жордана при $t > 0$ интегралы по дугам γ_1, γ_2 стремятся к нулю, если $R \rightarrow \infty$ и можно записать

$$g(t, \theta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{AB} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} + \int_{\gamma_r} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} + \int_{CD} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} \right]. \quad (2.71)$$

Интеграл по контуру γ_r стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, так как

$$\left| \int_{\gamma_r} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} \right| < \frac{M 2\pi r}{\sqrt{r}} = 2\pi M \sqrt{r},$$

здесь $M = \max |e^{-\theta\sqrt{p}+pt}|$ на окружности γ_r радиуса r . Далее, на отрезке AB : $p = \rho e^{-i\pi}$; $\sqrt{p} = \sqrt{\rho} e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{\rho}$; на отрезке CD : $p = \rho e^{i\pi}$; $\sqrt{p} = \sqrt{\rho} e^{i\pi/2} = i\sqrt{\rho}$, где $\rho = |p|$. Следовательно,

$$\int_{AB} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} = \int_R^r e^{i\theta\sqrt{\rho}-\rho t} \frac{d\rho}{i\sqrt{\rho}} = - \int_r^R e^{i\theta\sqrt{\rho}-\rho t} \frac{d\rho}{i\sqrt{\rho}}, \quad (2.72)$$

$$\int_{CD} e^{-\theta\sqrt{p}+pt} \frac{dp}{\sqrt{p}} = - \int_r^R e^{-i\theta\sqrt{\rho}-\rho t} \frac{d\rho}{i\sqrt{\rho}}. \quad (2.73)$$

Подставим интегралы (2.72) и (2.73) в (2.71) и для $g(t, \theta)$ получим

$$g(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left[\int_r^R e^{i\theta\sqrt{\rho}-\rho t} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} + \int_r^R e^{-i\theta\sqrt{\rho}-\rho t} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}} \right]. \quad (2.74)$$

Интегралы в квадратных скобках – комплексно сопряженные числа, их сумма равна удвоенной действительной части одного из них. Перейдя к пределу в интеграле (2.74), получим

$$g(t, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \cos \theta \sqrt{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}}. \quad (2.75)$$

Интеграл (2.75) подстановкой $\rho = \xi^2$, $d\rho = 2\xi d\xi$ сводится к интегралу Пуассона [16], значение которого известно:

$$g(t, \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 t} \cos \theta \xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\theta^2/4t}. \quad (2.76)$$

Пусть теперь известен оригинал $f(t)$ для изображения $F(p)$. По теореме Эфроса (2.66) с учетом формулы (2.76) запишем

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = L \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\theta) e^{-\theta^2/4t} d\theta \right]. \quad (2.77)$$

В частности, если $f(\theta) = h(\theta - \alpha) = \begin{cases} 1, & \theta > \alpha, \\ 0, & \theta < \alpha, \end{cases}$ $\alpha > 0$, то $F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p}$. Подставив это в формулу (2.77), найдем

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}} = L \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\theta^2/4t} d\theta \right]. \quad (2.78)$$

В интеграле (2.78) сделаем подстановку $x = \frac{\theta}{2\sqrt{t}}$, тогда

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} = L \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right], \quad (2.79)$$

но

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^{\alpha/2\sqrt{t}} e^{-x^2} dx \right) = \text{erf}(\infty) - \text{erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right), \quad (2.80)$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ – так называемая функция ошибок. Из равенства (2.76) при $t=1$, $\theta=0$ имеем

$$g(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Следовательно, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$. Учитывая это, соответствие (2.79) представим в виде

$$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p} = L \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (2.81)$$

2.15. Теорема умножения оригиналов

Теорема 2.11. Если $f(t)$, $g(t)$ – два оригинала с показателями роста s_1 и s_2 , то их произведение тоже оригинал, причем

$$L[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q) dq, \quad (2.82)$$

где $a > s_1$ и $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

Доказательство. Если $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы, то их произведение $f(t)g(t)$, очевидно, удовлетворяет условиям 1, 2 определения 2.1 (с. 82). Так как $|f(t)| < M_1 e^{s_1 t}$, $|g(t)| < M_2 e^{s_2 t}$, то $|f(t)g(t)| < M e^{st}$, где $M = M_1 M_2$, $s = s_1 + s_2$. Таким образом, $f(t)g(t)$ является оригиналом и его изображение по формуле (2.1)

$$L[f(t) \cdot g(t)] = \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-pt} dt. \quad (2.83)$$

Заменим $f(t)$ в формуле (2.83) по формуле обращения (2.7), приняв $a > s_1$:

$$L[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left(\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt} dq \right) g(t)e^{-pt} dt. \quad (2.84)$$

Благодаря равномерной сходимости внутреннего интеграла в формуле (2.84) относительно параметра t по теореме 2.27 можно изменить порядок

интегрирования, что даст

$$L[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q) \left(\int_0^{\infty} g(t) e^{-(p-q)t} dt \right) dq. \quad (2.85)$$

Примем, что $\operatorname{Re} p > s_2 + a$, а так как $\operatorname{Re} q = a$, то $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$. Это значит, что внутренний интеграл в формуле (2.85) является интегралом Лапласа и его можно заменить на $G(p-q)$, что и требовалось доказать.

Число a можно взять сколь угодно близким к s_1 , следовательно, изображение $f(t)g(t)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1 + s_2$.

2.16. Теорема дифференцирования изображения

Теорема 2.12. Если $F(p)$ изображение $f(t)$, то

$$\frac{dF(p)}{dp} = L[-tf(t)], \quad (2.86)$$

т. е. дифференцирование изображения по p сводится к умножению оригинала на $-t$.

Доказательство. Действительно, если

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (2.87)$$

то по теореме 2.1 $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и ее можно дифференцировать по p , и мы имеем из формулы (2.87)

$$\frac{dF(p)}{dp} = \int_0^{\infty} -tf(t) e^{-pt} dt = L[-tf(t)]. \quad (2.88)$$

Так как $F(p)$ – аналитическая функция, то она имеет производные любого порядка. Поэтому:

$$\frac{d^2 F(p)}{dp^2} = \int_0^{\infty} t^2 f(t) e^{-pt} dt = L[t^2 f(t)], \quad (2.89)$$

...

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} = \int_0^{\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-pt} dt = L[(-1)^n t^n f(t)], \quad (2.90)$$

Доказанная теорема позволяет расширить таблицу изображений.

Пример 2.15. Найти изображения функций $te^{\alpha t}$, $t \sin \omega t$, t , t^2 .

Решение. Перепишем соответствие (2.86) в виде

$$tf(t) \doteq -\frac{dF(p)}{dp} \quad (2.91)$$

и учтем, что $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}$, $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $h(t) \doteq \frac{1}{p}$. Тогда, дифференцируя эти изображения по p и подставляя $\frac{dF}{dp}$ в формулу (2.91), получаем

$$te^{\alpha t} \doteq \frac{1}{(p-\alpha)^2}, \quad t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}, \quad t \cdot h(t) \doteq \frac{1}{p^2}.$$

Дифференцируя последнее изображение по p , находим $t^2 h(t) \doteq \frac{2}{p^3}$.

2.17. Теорема интегрирования изображения

Теорема 2.13. Если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ сходится,

тогда

$$L \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_p^\infty F(p) dp, \quad (2.92)$$

т. е. интегрирование изображения сводится к делению оригинала на t .

Доказательство. Действительно, проинтегрировав интеграл Лапласа (2.1) по p в пределах от p до ∞ , предполагая, что путь интегрирования лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$, имеем

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_p^\infty \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right) dp. \quad (2.93)$$

Интеграл Лапласа по теореме 2.1 сходится равномерно, если $f(t)$ оригинал и $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$, поэтому в интеграле (2.93) по теореме 2.26 (с. 147) можно изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_0^\infty \left(\int_p^\infty e^{-pt} dp \right) f(t) dt. \quad (2.94)$$

но

$$\int_p^\infty e^{-pt} dp = -\frac{1}{t} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-pt} \Big|_p^b = \frac{e^{-pt}}{t}, \quad (2.95)$$

так как $\operatorname{Re} p > 0$. Подставив интеграл (2.95) в (2.94), запишем

$$\int_p^\infty F(p) dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt,$$

что доказывает, что изображение $\frac{f(t)}{t}$ равно $\int_p^\infty F(p) dp$.

Пример 2.16. Найти изображение функции $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$.

Решение. Известно, что $L[e^{at} - e^{bt}] = \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}$, тогда по формуле (2.92)

$$L\left[\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}\right] = \int_p^\infty \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}\right) dp = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \frac{p-a}{p-b} \Big|_p^u = \ln \frac{p-b}{p-a}.$$

Пример 2.17. Найти изображение функции $\frac{\sin \omega t}{t}$.

Решение. Известно, что $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, тогда по формуле (2.92)

$$L\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = \int_p^\infty \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} dp = \int_{p/\omega}^\infty \frac{dp/\omega}{(p/\omega)^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega} \Big|_p^b = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}.$$

2.18. Теоремы разложения

В приложениях преобразования Лапласа задача его обращения вызывает затруднения чаще, чем поиск самого изображения. Это связано с тем, что при решении дифференциальных, интегральных и других уравнений обычно применяют преобразование к самим уравнениям, переходя в них от оригиналов к изображениям по определенным правилам. После этого нужно вернуться от изображений к оригиналам. Это проще всего сделать, используя табличные соответствия $F(p) \doteq f(t)$. Если нужного

соответствия нет в таблицах, то оригинал находят по формуле обращения (2.7), что требует умения вычислять контурный интеграл, который в нее входит. Найти его точное выражение через известные функции не просто и удается далеко не всегда. В некоторых случаях указанные трудности можно обойти, используя так называемые теоремы разложения.

Теорема 2.14. Если изображение $F(p)$ является аналитической функцией в окрестности бесконечно удаленной точки $|\operatorname{Re} p| > R$ и имеет в ней лорановское разложение

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \quad (2.96)$$

то оригиналом для $F(p)$ служит умноженная на $h(t)$ функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}. \quad (2.97)$$

Доказательство. Каждому члену ряда (2.96) соответствует оригинал вида $\frac{c_k}{p^k} \doteq \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$. Отсюда формально по свойству линейности имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k} \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} = f(t). \quad (2.98)$$

Теорема будет доказана, если мы докажем, что ряд для $f(t)$ (2.97) равномерно сходится при $t > 0$, а функция $f(t)$ является оригиналом. Введем новую переменную $q = \frac{1}{p}$ и обозначим $F\left(\frac{1}{q}\right) = \Phi(q)$, получим

$$\Phi(q) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k. \quad (2.99)$$

Степенной ряд (2.99) сходится внутри некоторого круга $|q| < R$ и, следовательно, является для функции $\Phi(q)$ рядом Тейлора, коэффициенты c_k которого, как известно, равны $\frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k \Phi(0)}{dq^k}$. Используя оценку для модуля k -й производной функции комплексного переменного [15], имеем

$$|c_k| \leq \frac{M}{R^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.100)$$

Здесь $M = \max |\Phi(q)|$ на окружности радиуса $|q| = R$. Используя неравенство (2.100) и ряд (2.97), сделаем оценку $|f(t)|$:

$$|f(t)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{(k-1)!} |t|^{k-1} \leq \frac{M}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^{k-1}}{R^{k-1}} \cdot \frac{1}{(k-1)!}. \quad (2.101)$$

Ряд в правой части неравенства (2.101) сходится при любом конечном t , так как это разложение показательной функции

$$e^{|t|/R} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|t|^{k-1}}{R^{k-1}} \cdot \frac{1}{(k-1)!}. \quad (2.102)$$

Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (2.97) сходится равномерно, а из формул (2.101), (2.102) имеем

$$|f(t)| \leq M_1 e^{s_1 t}, \quad (2.103)$$

где $s_1 = \frac{1}{R}$, $M_1 = \frac{M}{R}$.

Неравенство (2.103) означает, что функция $f(t)$ – оригинал, что и требовалось доказать.

Пример 2.18. Найти оригинал, если $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$.

Решение. Этот пример мы рассматриваем в качестве иллюстрации теоремы 2.14. Перепишем изображение в виде

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{p}{p^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{1}{p^2}}.$$

Если $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$, то дробь в правой части равна сумме членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $-\frac{1}{p^2}$. Записав эту прогрессию, получим ряд Лорана для аналитической в бесконечно удаленной точке функции $F(p)$:

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \dots$$

Отсюда по формуле (2.97) имеем для $f(t)$ разложение

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots,$$

которое есть ряд Маклорена для $\cos t$. Таким образом, $F(p) \doteq \cos t$.

Пример 2.19. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sin \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

Решение. Запишем стандартное разложение

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

и, приняв в нем $x = \frac{1}{\sqrt{p}}$, получим ряд

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! \sqrt{p^{2k+1}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! p^{k+1}}.$$

Теперь по формуле (2.97), учитывая, что $c_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, находим оригинал

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(2k+1)! k!}.$$

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами часто требуется найти оригинал для правильной рациональной дроби $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, где $A(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0$, $B(p) = p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0$. Многочлены $A(p)$, $B(p)$ не имеют общих корней, а все их коэффициенты – действительные числа. Предположим, что все корни p_k , $k = 1, 2, \dots, n$ многочлена $B(p)$ различны, тогда, разлагая $F(p)$ на сумму простых дробей, запишем

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{C_1}{p-p_1} + \frac{C_2}{p-p_2} + \dots + \frac{C_k}{p-p_k} + \dots + \frac{C_n}{p-p_n}. \quad (2.104)$$

Для определения чисел C_k умножим все члены равенства (2.104) на $p-p_k$:

$$F(p)(p-p_k) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{C_1(p-p_k)}{p-p_1} + \frac{C_2(p-p_k)}{p-p_2} + \dots + C_k + \dots + \frac{C_n(p-p_k)}{p-p_n}. \quad (2.105)$$

Перейдем к пределу в формуле (2.105) при $p \rightarrow p_k$. При этом в правой части все члены, кроме C_k , обратятся в нуль. Следовательно,

$$C_k = \lim_{p \rightarrow p_k} F(p)(p-p_k) = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{A(p)(p-p_k)}{B(p)} = \frac{A(p_k)}{\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{B(p)}{p-p_k}}. \quad (2.106)$$

Поскольку $B(p_k) = 0$, то по определению производной

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{B(p)}{p-p_k} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{B(p) - B(p_k)}{p-p_k} = \frac{dB(p_k)}{dp}.$$

Отсюда

$$C_k = \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}. \quad (2.107)$$

Используя известное соответствие

$$\frac{C_k}{p - p_k} \doteq C_k e^{p_k t}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

из формулы (2.104) по свойству линейности находим оригинал:

$$f(t) = L^{-1} \left[\frac{A(p)}{B(p)} \right] = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}, \quad (2.108)$$

где C_k вычисляются по формулам (2.107).

Пример 2.20. Найти оригинал, если

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{p^2 - 1}{(p - 2)(p^2 + 1)}.$$

Решение. Корни многочлена $B(p)$ равны $p_1 = 2$, $p_2 = -i$, $p_3 = i$. Поскольку коэффициенты многочлена $(p - 2)(p^2 + 1)$ – действительные числа, то комплексные корни – комплексно-сопряженные числа. Разложим $F(p)$ на сумму дробей

$$F(p) = \frac{p^2 - 1}{(p - 2)(p^2 + 1)} = \frac{C_1}{p - 2} + \frac{C_2}{p + i} + \frac{C_3}{p - i}.$$

Найдем производную $B'(p) = p^2 + 1 + 2p(p - 2) = 3p^2 - 4p + 1$. Вычислим C_1 , C_2 и C_3 по формуле (2.107):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A(2)}{B'(2)} = \frac{4 - 1}{3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{5}, \\ C_2 &= \frac{A(-i)}{B'(-i)} = \frac{i^2 - 1}{3i^2 + 4i + 1} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1}{5}(1 + 2i), \\ C_3 &= \frac{A(i)}{B'(i)} = \frac{i^2 - 1}{3i^2 - 4i + 1} = \frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{5}(1 - 2i). \end{aligned}$$

Подставим C_1 , C_2 , C_3 в разложение для $F(p)$ и, совершив обратное преобразование, получим оригинал

$$f(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}(1 + 2i)e^{-it} + \frac{1}{5}(1 - 2i)e^{it}.$$

В этой формуле два последних слагаемых – комплексно-сопряженные числа, следовательно, их сумма равна удвоенной действительной части одного из них:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5} \operatorname{Re}(1+2i)e^{-it} = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5} \operatorname{Re}(1+2i)(\cos t - i \sin t) = \\
 &= \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}(\cos t + 2 \sin t).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда корни многочлена $B(p)$ кратные. Пусть уравнение $B(p)=0$ имеет r различных корней p_1, p_2, \dots, p_r и пусть корень p_1 встречается m_1 раз, корень p_2 — m_2 раз, ..., корень p_r — m_r раз, т. е. $B(p) = (p-p_1)^{m_1}(p-p_2)^{m_2} \dots (p-p_r)^{m_r}$. Причем $m_1+m_2+\dots+m_r=n$. Из курса анализа известно, что правильная рациональная дробь разлагается на сумму простейших дробей. При этом каждому корню p_k кратности m_k соответствует сумма из m_k дробей вида

$$\frac{C_{k1}}{(p-p_k)^{m_k}} + \frac{C_{k2}}{(p-p_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{C_{km_k}}{p-p_k} = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{C_{kj}}{(p-p_k)^{m_k-j+1}}. \quad (2.109)$$

Разложение для дроби $\frac{A(p)}{B(p)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} &= \frac{C_{11}}{(p-p_1)^{m_1}} + \frac{C_{12}}{(p-p_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{C_{1j}}{(p-p_1)^{m_1-j+1}} + \\
 &+ \dots + \frac{C_{1m_1}}{p-p_1} + \dots + \frac{C_{k1}}{(p-p_k)^{m_k}} + \frac{C_{k2}}{(p-p_k)^{m_k-1}} + \dots + \frac{C_{kj}}{(p-p_k)^{m_k-j+1}} + \\
 &+ \dots + \frac{C_{km_k}}{p-p_k} + \dots = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} \frac{C_{kj}}{(p-p_k)^{m_k-j+1}}. \quad (2.110)
 \end{aligned}$$

В этой формуле числа C_{kj} ($k=1, 2, \dots, r, j=1, 2, \dots, m_k$) пока неизвестны. Для вычисления $C_{k1}, C_{k2}, \dots, C_{km_k}$ умножим все члены равенства (2.110) на $(p-p_k)^{m_k}$, получим

$$\begin{aligned}
 F(p)(p-p_k)^{m_k} &= C_{k1} + C_{k2}(p-p_k) + C_{k3}(p-p_k)^2 + \dots + \\
 &+ C_{km_k}(p-p_k)^{m_k-1} + (p-p_k)^{m_k} \left[\frac{C_{11}}{(p-p_1)^{m_1}} + \dots + \frac{C_{rm_r}}{p-p_r} \right]. \quad (2.111)
 \end{aligned}$$

В квадратных скобках заключены все слагаемые равенства (2.110), кроме дробей со знаменателями $(p-p_k)^{m_k-j+1}$. Перейдем к пределу при $p \rightarrow p_k$ в обеих частях равенства (2.111). Тогда в его правой части все члены, кроме C_{k1} , обратятся в нуль и мы получим

$$C_{k1} = \lim_{p \rightarrow p_k} (p-p_k)^{m_k} F(p). \quad (2.112)$$

Продифференцируем обе части равенства (2.111) по p :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} [F(p)(p-p_k)^{m_k}] = & C_{k2} + 2C_{k3}(p-p_k) + \dots + (m_k-1)C_{km_k}(p-p_k)^{m_k-2} + \\ & + \frac{d}{dp} \left\{ (p-p_k)^{m_k} \left[\frac{C_{11}}{(p-p_k)^{m_1}} + \dots + \frac{C_{rm_r}}{p-p_r} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Перейдя к пределу при $p \rightarrow p_k$, найдем C_{k2} :

$$C_{k2} = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d}{dp} \left[(p-p_k)^{m_k} F(p) \right]. \quad (2.114)$$

Продифференцировав равенство (2.113) и совершив предельный переход при $p \rightarrow p_k$, найдем C_{k3} :

$$C_{k3} = \frac{1}{2!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^2}{dp^2} \left[(p-p_k)^{m_k} F(p) \right]. \quad (2.115)$$

Продолжив описанный здесь путь вычислений, найдем все коэффициенты C_{kj} :

$$C_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[(p-p_k)^{m_k} F(p) \right], \quad \begin{matrix} k=1, 2, \dots, r, \\ j=1, 2, \dots, m_k. \end{matrix} \quad (2.116)$$

Теперь, совершив обратное преобразование над формулой (2.110), найдем

$$f(t) = L^{-1} \left[\frac{A(p)}{B(p)} \right] = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} L^{-1} \left[\frac{C_{kj}}{(p-p_k)^{m_k-j+1}} \right], \quad (2.117)$$

но по табл. Б.2 прил. Б и теореме затухания 2.6

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(p-p_k)^{m_k-j+1}} \right] = \frac{t^{m_k-j} e^{p_k t}}{(m_k-j)!}. \quad (2.118)$$

Поэтому окончательно получим

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} \frac{C_{kj}}{(m_k-j)!} t^{m_k-j} e^{p_k t}. \quad (2.119)$$

Здесь C_{kj} вычисляются по формулам (2.116). Очевидно, что если все корни уравнения $B(p)=0$ простые, т. е. все $m_k=1$, то формулы (2.116) и (2.107) совпадают, так как $0!=1$ по определению факториала, а производная нулевого порядка есть сама функция.

Все рассуждения, проведенные нами относительно обращения дроби $\frac{A(p)}{B(p)}$, можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 2.15. Если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ – правильная несократимая дробь и p_1, p_2, \dots, p_r – корни многочлена n -й степени $B(p)$ с кратностями соответственно m_1, m_2, \dots, m_r , где $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$, тогда оригиналом для $F(p)$ служит умноженная на $h(t)$ функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{m_k} \frac{C_{kj}}{(m_k - j)!} t^{m_k - j} e^{p_k t},$$

где

$$C_{kj} = \frac{1}{(j-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[(p - p_k)^{m_k} F(p) \right], \quad \begin{matrix} k=1, 2, \dots, r, \\ j=1, 2, \dots, m_k. \end{matrix}$$

Теоремы 2.14 и 2.15 обычно называют первой и второй теоремами разложения.

2.19. Предельные соотношения

Теорема 2.16. Если $f(t)$ и ее производная $\frac{df}{dt}$ являются оригиналами и $F(p) \doteq f(t)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0), \quad (2.120)$$

где $p \rightarrow \infty$ внутри угла $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$, т. е. при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$, $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Доказательство. По теореме дифференцирования оригинала

$$L \left[\frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0). \quad (2.121)$$

Поскольку $\frac{df}{dt}$ – оригинал, то по следствию (2.5) его изображение (2.121) должно стремиться к нулю при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$, т. е.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0)) = 0. \quad (2.122)$$

Так как $f(0)$ – константа, то из формулы (2.122) следует равенство (2.120).

Теорема 2.17. Если $f(t)$ и ее производная $\frac{df}{dt}$ являются оригиналами и существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, тогда

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty), \quad (2.123)$$

где $p \rightarrow 0$, оставаясь внутри угла $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$, т. е. в правой полуплоскости.

Доказательство. Поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ существует, то $f(t)$ – ограниченная функция и ее показатель роста $s_0 = 0$, следовательно, $F(p)$ и равенство (2.121) определены для любого p , если $\operatorname{Re} p > 0$. Интеграл в формуле (2.121) существует, при $p = 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = f(\infty) - f(0). \quad (2.124)$$

С другой стороны, переходя к пределу в правой части формулы (2.121) при $p \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) - f(0). \quad (2.125)$$

Приравнявая правые части в равенствах (2.124) и (2.125), получаем формулу (2.123).

Теорема 2.18. Если оригинал $f(t)$ – непрерывная функция при $t \geq 0$ и несобственный интеграл $\int_0^{\infty} f(t) dt$ сходится, тогда

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} L[f(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} F(p). \quad (2.126)$$

Доказательство. Существование интеграла $\int_0^{\infty} f(t) dt$ означает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, откуда следует ограниченность функции $f(t)$. Поэтому ее показатель роста $s_0 = 0$. Таким образом, изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. Обозначим $g(t) = \int_0^t f(t) dt$. По теореме интегрирования оригинала

$$L[g(t)] = L \left[\int_0^t f(t) dt \right] = \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

По определению несобственного интеграла и по теореме 2.17 запишем

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(t) dt = g(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pL[g(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{F(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} F(p),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.19. Если $\frac{f(t)}{t}$ – непрерывный оригинал, $f(t) \doteq F(p)$, несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ сходится, то имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau = \int_0^{\infty} F(q) dq. \quad (2.127)$$

Доказательство. Перепишем теорему подобия, приняв в формуле (2.29) $\alpha = \frac{1}{\beta}$:

$$F(\beta p) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right) e^{-pt} dt. \quad (2.128)$$

Проинтегрируем равенство (2.128) по β в пределах от 0 до 1, а затем изменим порядок интегрирования:

$$\int_0^1 F(\beta p) d\beta = \int_0^1 \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{\beta}\right) e^{-pt} dt d\beta = \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 f\left(\frac{t}{\beta}\right) \frac{d\beta}{\beta} \right) e^{-pt} dt. \quad (2.129)$$

В правой части равенства (2.129) стоит интеграл Лапласа, значит, интеграл в левой части является изображением

$$\int_0^1 F(\beta p) d\beta = L \left[\int_0^1 f\left(\frac{t}{\beta}\right) \frac{d\beta}{\beta} \right]. \quad (2.130)$$

В формуле (2.130) в левой части сделаем замену переменной интегрирования $q = p\beta$, $\beta = \frac{q}{p}$, $d\beta = \frac{dq}{p}$, а в правой обозначим $\frac{t}{\beta} = \tau$, откуда $\beta = \frac{t}{\tau}$, $d\beta = -\frac{td\tau}{\tau^2}$, $\frac{d\beta}{\beta} = -\frac{d\tau}{\tau}$. После этого имеем из формулы (2.130)

$$\frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq = L \left[\int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right]. \quad (2.131)$$

По теореме интегрирования изображения (2.92)

$$\int_p^\infty F(q) dq = L \left[\frac{f(t)}{t} \right], \quad (2.132)$$

а по теореме интегрирования оригинала (2.47)

$$\frac{1}{p} \int_p^\infty F(q) dq = L \left[\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right]. \quad (2.133)$$

Складывая почленно равенства (2.131) и (2.133), по свойству линейности имеем

$$\frac{1}{p} \int_0^\infty F(q) dq = L \left[\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right]. \quad (2.134)$$

Обозначим

$$M = \int_0^\infty F(q) dq, \quad N = \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (2.135)$$

Числа M и N не зависят от p . Подставим их в формулу (2.134):

$$\frac{M}{p} = L[N] = \frac{N}{p}. \quad (2.136)$$

Отсюда следует, что $M = N$, что и доказывает равенство (2.127).

Теоремы 2.16 и 2.17 удобны для проверки вычислений при нахождении соответствий $f(t) \doteq F(p)$ или $F(p) \doteq f(t)$.

Пример 2.21. Проверить правильность соответствия

$$e^{-2t} \sin \sqrt{3}t \doteq \frac{\sqrt{3}}{(p+2)^2 + 3}.$$

Решение. По теореме 2.16 должно выполняться равенство $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0)$. В нашем случае $f(0) = 0$,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}p}{(p+2)^2 + 3} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{p \left[\left(\frac{1}{p} + 2 \right)^2 + \frac{3}{p^2} \right]} = 0 = f(0).$$

По теореме 2.17 $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$. В нашем случае

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{3}t}{e^{2t}} = 0$, так как $\frac{1}{e^{2t}}$ — бесконечно малая при $t \rightarrow \infty$, а $|\sin \sqrt{3}t| \leq 1$. При этом

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p\sqrt{3}}{(p+2)^2 + 3} = 0.$$

Таким образом, теоремы 2.16 и 2.17 подтверждают правильность данного соответствия.

Теоремы 2.18 и 2.19 позволяют находить изображения некоторых определенных интегралов с переменными пределами интегрирования и вычислять несобственные интегралы.

Пример 2.22. Найти изображение $\Phi(p)$ для $\int_t^\infty \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$.

Решение. По формуле (2.131)

$$\Phi(p) = L \left[\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \right] = \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq.$$

Имеем $f(t) = \cos t \stackrel{p}{=} \frac{p}{p^2+1} = F(p)$. Отсюда искомое изображение

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} \int_0^p \frac{q}{q^2+1} dq = \frac{1}{2p} \int_0^p \frac{dq^2}{q^2+1} = \frac{1}{2p} \ln(p^2+1).$$

Пример 2.23. Вычислить несобственные интегралы:

$$1) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \quad 2) \int_0^\infty \frac{\cos mt - \cos nt}{t} dt.$$

Решение.

1. Пусть $f(t) = \sin t$, тогда $F(p) = \frac{1}{p^2+1}$. По теореме 2.19 имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty F(p) dp = \int_0^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

2. Обозначим $f(t) = \cos mt - \cos nt$, тогда $F(p) = \frac{p}{p^2+m^2} - \frac{p}{p^2+n^2}$. По теореме 2.19 имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos mt - \cos nt}{t} dt &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{p^2+m^2} - \frac{1}{p^2+n^2} \right) p dp = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{p^2+m^2} - \frac{1}{p^2+n^2} \right) dp^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2+m^2}{p^2+n^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{n^2} = \ln \left| \frac{n}{m} \right|. \end{aligned}$$

2.20. Формула Парсеваля

Теорема 2.20. Если при $\operatorname{Re} p > 0$ изображениями оригиналов $f(t)$, $g(t)$ являются соответственно функции $F(p)$ и $G(p)$ и несобственные интегралы $\int_0^{\infty} f(x)G(x) dx$, $\int_0^{\infty} g(x)F(x) dx$ по действительной переменной x сходятся абсолютно, то имеет место формула Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f(x)G(x) dx = \int_0^{\infty} g(x)F(x) dx. \quad (2.137)$$

Доказательство. По определению изображения

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (2.138)$$

Запишем произведение $f(x)G(x)$ с учетом формулы (2.138):

$$f(x)G(x) = f(x) \int_0^{\infty} g(t)e^{-xt} dt. \quad (2.139)$$

Проинтегрируем обе части формулы (2.139) по x в пределах от 0 до ∞ :

$$\int_0^{\infty} f(x)G(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) \int_0^{\infty} g(t)e^{-xt} dt dx. \quad (2.140)$$

Интеграл в левой части равенства (2.140) сходится абсолютно по условию теоремы. Интеграл Лапласа (2.138) при $p = x$, и $x > 0$ сходится абсолютно и равномерно по теореме 2.1, поэтому в равенстве (2.140) в правой части допустимо изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\infty} f(x)G(x) dx = \int_0^{\infty} g(t) \int_0^{\infty} f(x)e^{-xt} dx dt = \int_0^{\infty} g(t)F(t) dt,$$

что доказывает равенство (2.137).

Формула Парсеваля позволяет легко вычислить некоторые несобственные интегралы.

Пример 2.24. Вычислить $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt$.

Решение. Примем $f(t) = \cos at - \cos bt$, $G(p) = \frac{1}{p}$, тогда

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + a^2} - \frac{p}{p^2 + b^2}, \quad g(t) = h(t),$$

$$F(t) = \frac{t}{t^2 + a^2} - \frac{t}{t^2 + b^2}, \quad G(t) = \frac{1}{t}.$$

Запишем формулу Парсеваля:

$$I = \int_0^{\infty} f(t)G(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt = \int_0^{\infty} g(t)F(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{t^2 + a^2} - \frac{t}{t^2 + b^2} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t^2 + a^2}{t^2 + b^2} \Big|_0^{\infty} = \ln \left| \frac{b}{a} \right|.$$

Пример 2.25. Вычислить $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x \cos \omega x}{x} dx$.

Решение. Перепишем $\sin \omega x \cos \omega x = \frac{1}{2} \sin 2\omega x$. Примем $f(x) = \sin 2\omega x$, $G(p) = \frac{1}{p}$, тогда $F(p) = \frac{2\omega}{p^2 + 4\omega^2}$, $g(x) = h(x)$, $G(x) = \frac{1}{x}$. Теперь по формуле Парсеваля имеем

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\omega x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{2\omega}{x^2 + 4\omega^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{x}{2\omega}\right)}{\left(\frac{x}{2\omega}\right)^2 + 1} = \arctg \left(\frac{x}{2\omega} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

2.21. Дельта-функция

Исследуем функцию (рис. 2.17)

$$\delta(t, \varepsilon) = \frac{h(t) - h(t - \varepsilon)}{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon. \end{cases} \quad (2.141)$$

Если $\delta(t, \varepsilon)$ рассматривать как постоянную силу, действующую в промежутке времени от 0 до ε , а в остальное время равную нулю, то, очевидно, импульс этой силы

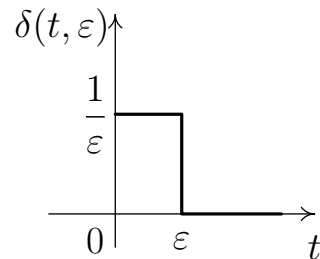


Рис. 2.17

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \varepsilon) dt = \int_0^{\varepsilon} \delta(t, \varepsilon) dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{\varepsilon} = 1. \quad (2.142)$$

Предположим теперь, что $\varepsilon \rightarrow 0$, очевидно, что при этом семейство функций $\delta(t, \varepsilon)$ расходится, но мы введем условную функцию $\delta(t)$, которую будем считать равной пределу при таком предельном переходе:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t - \varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (2.143)$$

Полученную таким образом функцию будем называть дельта-функцией. Дельта-функция равна нулю всюду, кроме $t=0$, где она равна ∞ :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (2.144)$$

но тем не менее мы будем полагать, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.145)$$

Таким образом, дельта-функцию можно истолковать как бесконечно большую силу, действующую в бесконечно малый промежуток времени, но имеющую конечный импульс равный 1. Найдем преобразование Лапласа дельта-функции как предел изображения $\delta(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L[\delta(t, \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L \left[\frac{h(t) - h(t - \varepsilon)}{\varepsilon} \right]. \quad (2.146)$$

Поскольку $L[h(t)] = \frac{1}{p}$, $L[h(t - \varepsilon)] = \frac{e^{-p\varepsilon}}{p}$, то

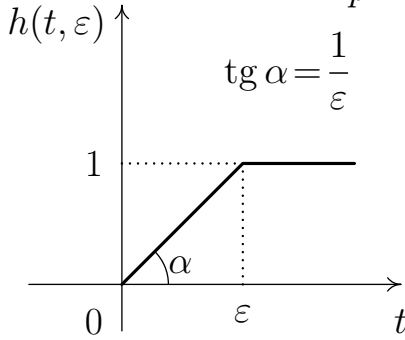


Рис. 2.18

$$L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} = 1. \quad (2.147)$$

При вычислении последнего предела использовали правило Лопиталья.

Рассмотрим функцию $h(t, \varepsilon)$:

$$h(t, \varepsilon) = \int_0^t \delta(t, \varepsilon) dt = \begin{cases} \frac{t}{\varepsilon}, & 0 < t \leq \varepsilon, \\ 1, & t > \varepsilon. \end{cases} \quad (2.148)$$

График $h(t, \varepsilon)$ изображен на рис. 2.18. Из этого графика видим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\frac{1}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, а график функции $h(t, \varepsilon)$ стремится к графику единичной функции $h(t)$, так что можно принять

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \delta(t, \varepsilon) dt = \int_0^t \delta(t) dt = h(t), \quad (2.149)$$

но тогда

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta(t). \quad (2.150)$$

Поскольку при $t=0$ функция $h(t, \varepsilon) = 0$ (рис. 2.18), то полагаем, что $h(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} h(t, \varepsilon) = 0$, тогда из формулы (2.150) по теореме дифференцирования оригинала имеем

$$L[\delta(t)] = L\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = p \cdot \frac{1}{p} = 1, \quad (2.151)$$

что подтверждает правильность формулы (2.147).

Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная функция. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \delta(t, \varepsilon) dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) dt.$$

По теореме о среднем его можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \delta(t, \varepsilon) dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \varphi(\theta) = \varphi(\theta), \quad (2.152)$$

где $0 < \theta < \varepsilon$. Переходя в формуле (2.152) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем по определению

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0). \quad (2.153)$$

Если $\varphi(t)$ при $t=0$ терпит разрыв, то $\varphi(0)$ – правосторонний предел $\varphi(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t)$. Если в формуле (2.152) $\varphi(t) = e^{-pt}$, то вновь получаем

$$\int_0^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = L[\delta(t)] = e^0 = 1. \quad (2.154)$$

Для дельта-функции справедлива теорема запаздывания

$$L[\delta(t - \tau)] = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau}. \quad (2.155)$$

Найдем изображение свертки дельта-функции с функцией-оригиналом $f(t)$. По теореме умножения изображений (2.53)

$$L\left[\int_0^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt\right] = F(p) \cdot 1 = L[f(\tau)]. \quad (2.156)$$

Отсюда следует так называемое фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_0^{\infty} f(t)\delta(t-\tau) dt = f(\tau). \quad (2.157)$$

Отметим, что дельта-функция не является функцией в обычном смысле, так как условия (2.144), (2.145) несовместимы с позиций классического анализа. Дельта-функция относится к классу обобщенных функций, теория которых подробно изложена в [26]. Следует помнить, что дельта-функция имеет смысл только как множитель подынтегрального выражения и не имеет самостоятельного значения.

2.22. Изображение оригиналов, зависящих от второй переменной

Пусть $f(t, x)$ – оригинал, зависящий от двух переменных, показатель роста которого s не зависит от x , тогда

$$L[f(t, x)] = F(p, x) = \int_0^{\infty} f(t, x)e^{-pt} dt. \quad (2.158)$$

Теорема 2.21. Если $L[f(t, x)] = F(p, x)$ и существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} F(p, x)$, то $L[\lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} F(p, x)$.

Теорема 2.21 следует из теорем 2.1 и 2.25. Теорема 2.21 утверждает, что операции вычисления изображения по t и предела по x перестановочны. Теорема позволяет в частных случаях получать соответствия изображений и оригиналов из соответствий, относящихся к более общим случаям. Рассмотрим это на следующих примерах.

Пример 2.26. Найти изображение единичной функции, зная, что $\cos xt \doteq \frac{p}{p^2 + x^2}$.

Решение.

$$L[h(t)] = \lim_{x \rightarrow 0} \cos xt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p}{p^2 + x^2} = \frac{1}{p}.$$

Пример 2.27. Исходя из соответствия

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} \doteq \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}),$$

найти соответствие, получающееся при $a \rightarrow b$ по теореме 2.21.

Решение.

$$L\left[\lim_{a \rightarrow b} \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})\right] = \lim_{a \rightarrow b} \frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{1}{(p+b)^2},$$

НО

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{e^{-bt}(a^{-(b-a)t} - 1)}{b-a} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{te^{-bt}(a^{-yt} - 1)}{ty} = te^{-bt},$$

где $y = b - a$, следовательно $te^{-bt} \doteq \frac{1}{(p+b)^2}$.

Теорема 2.22. Если $L[f(t, x)] = F(p, x)$ и существует производная $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$, то

$$L\left[\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x} F(p, x). \quad (2.159)$$

Теорема 2.22 позволяет расширить таблицу соответствий $f(t) \doteq F(p)$.

Пример 2.28. Найти соответствие, получающееся дифференцированием по ω соответствия $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Решение. Дифференцируя по ω , получаем

$$\begin{aligned} s \frac{\partial}{\partial \omega} \sin \omega t &= t \cos \omega t, \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} &= \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \end{aligned}$$

тогда по теореме 2.22 новое соответствие будет $t \cos \omega t \doteq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$.

Теорема 2.23. Если $L[f(t, x)] = F(p, x)$ и существуют интегралы $\int_c^d f(t, x) dx$ и $\int_c^d F(p, x) dx$, то справедливо равенство

$$L\left[\int_c^d f(t, x) dx\right] = \int_c^d F(p, x) dx. \quad (2.160)$$

Теоремы 2.22 и 2.23 следуют из теорем 2.1, 2.25, 2.27.

Пример 2.29. Интегрируя по ω от 0 до ω соответствие $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, найти новое соответствие.

Решение. Проинтегрировав обе части соответствия, получим

$$\int_0^{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \frac{1}{t}(1 - \cos \omega t),$$

$$\int_0^{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{1}{2} \ln(p^2 + \omega^2) \Big|_0^{\omega} = \frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + \omega^2}{p^2},$$

тогда по теореме 2.23 получаем соответствие $\frac{1}{t}(1 - \cos \omega t) \doteq \frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + \omega^2}{p^2}$.

2.23. Применение преобразования Лапласа к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \quad (2.161)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad y''(0) = y_2, \dots, y^{n-1}(0) = y_{n-1}, \quad (2.162)$$

здесь $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ – заданные числа, $f(t)$ – известная функция.

Будем считать, что искомая функция $y(t)$ со всеми ее производными до n -го порядка включительно является оригиналом. Обозначим $Y(p) \doteq y(t)$, $F(p) \doteq f(t)$. Умножим обе части уравнения (2.161) на e^{-pt} и проинтегрируем в пределах от $t=0$ до ∞ :

$$a_n \int_0^{\infty} \frac{d^n y}{dt^n} e^{-pt} \, dt + a_{n-1} \int_0^{\infty} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} e^{-pt} \, dt + \dots +$$

$$+ a_1 \int_0^{\infty} \frac{dy}{dt} e^{-pt} \, dt + a_0 \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} \, dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} \, dt. \quad (2.163)$$

Теперь на основании теоремы о дифференцировании оригинала выразим изображения производных через изображение самой функции и начальные условия (2.162) по формулам (2.42), (2.44) и (2.45):

$$a_n(p^n Y(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_1 - \dots - y_{n-1}) + a_{n-1}(p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y_0 - p^{n-3}y_1 - \dots - y_{n-2}) + \dots + a_1(pY(p) - y_0) + a_0Y(p) = F(p). \quad (2.164)$$

В левой части уравнения (2.164) сгруппируем члены, содержащие $Y(p)$, а не содержащие $Y(p)$ перенесем вправо:

$$Y(p)(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) = F(p) + a_n(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_1 + \dots + y_{n-1}) + a_{n-1}(p^{n-2}y_0 + p^{n-3}y_1 + \dots + y_{n-2}) + \dots + a_1 y_0. \quad (2.165)$$

Таким образом, с помощью преобразования Лапласа дифференциальное уравнение (2.161) свели к алгебраическому уравнению первой степени (2.165) относительно $Y(p)$, при этом автоматически были учтены начальные условия (2.162).

Обозначим

$$\begin{aligned} A_n(p) &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0, \\ B_{n-1}(p) &= a_n(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_1 + \dots + y_{n-1}) + \\ &\quad + a_{n-1}(p^{n-2}y_0 + p^{n-3}y_1 + \dots + y_{n-2}) + \dots + a_2(p y_0 + y_1) + a_1 y_0 \end{aligned}$$

и перепишем уравнение (2.165) в виде

$$A_n(p)Y(p) = F(p) + B_{n-1}(p), \quad (2.166)$$

отсюда

$$Y(p) = \frac{F(p) + B_{n-1}(p)}{A_n(p)}. \quad (2.167)$$

Теперь, совершая обратное преобразование, найдем $y(t)$ – частное решение уравнения (2.161), удовлетворяющее начальным условиям (2.162):

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = L^{-1} \left[\frac{F(p) + B_{n-1}(p)}{A_n(p)} \right]. \quad (2.168)$$

Обратное преобразование в формуле (2.168) легче всего осуществить, если для $Y(p)$ имеется оригинал в таблице. В случаях, когда $F(p)$ – рациональная функция, $y(t)$ тоже удастся найти, не прибегая к вычислению интеграла Меллина (2.7).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.161) с нулевыми начальными условиями, т. е. когда $y_0 = y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$. Тогда в формуле (2.167) $B_{n-1}(p) = 0$. Предположим, что нам известно решение $y_1(t)$ уравнения (2.161) с нулевыми начальными условиями и правой частью $f(t) = h(t)$. Обозначим $Y_1(p) \doteq y_1(t)$, $F(p) = \frac{1}{p}$. С учетом сказанного перепишем уравнение (2.166):

$$A_n(p)Y_1(p) = \frac{1}{p}. \quad (2.169)$$

Напоминаем, что здесь $Y_1(p)$ – известное изображение. Из уравнения (2.169) имеем

$$A_n(p) = \frac{1}{pY_1(p)}. \quad (2.170)$$

Подставим равенство (2.170) в (2.167), помня, что $B_{n-1}(p) = 0$, получим

$$Y(p) = pY_1(p)F(p). \quad (2.171)$$

Теперь с помощью интеграла Дюамеля (2.62) запишем частное решение уравнения (2.161) с любой правой частью $f(t)$ при нулевых начальных условиях

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau) d\tau \quad (2.172)$$

или

$$y(t) = y_1(t)f(0) + \int_0^t f'(\tau)y_1(t-\tau) d\tau. \quad (2.173)$$

Значение полученного результата состоит в том, что при вычислении интегралов (2.172), (2.173) нам не важно, как получена функция $y_1(t)$: экспериментально или в результате каких-то расчетов, численных или аналитических.

Совершенно аналогично применяется преобразование Лапласа и при решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами с неизвестными функциями $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$:

$$\begin{cases} y_1'(t) + a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) = f_1(t), \\ y_2'(t) + a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \dots + a_{2n}y_n(t) = f_2(t), \\ \dots \\ y_n'(t) + a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \dots + a_{nn}y_n(t) = f_n(t), \end{cases} \quad (2.174)$$

с начальными условиями:

$$y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(0) = y_{n0}. \quad (2.175)$$

Здесь a_{jk} , y_{k0} , $j, k = 1, 2, \dots, n$ – заданные числа; $f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ – заданные функции. Обозначим $Y_k(p) \doteq y_k(t)$, $F_k(p) \doteq f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Применив преобразование Лапласа ко всем членам уравнений (2.174), с учетом формулы (2.42) и начальных условий (2.175), получим систему n

линейных алгебраических уравнений относительно изображений $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, ..., $Y_n(p)$:

$$\begin{cases} (p+a_{11})Y_1(p) + a_{12}Y_2(p) + \dots + a_{1n}Y_n(p) = F_1(p) + y_{10}, \\ a_{21}Y_1(p) + (p+a_{22})Y_2(p) + \dots + a_{2n}Y_n(p) = F_2(p) + y_{20}, \\ \dots \\ a_{n1}Y_1(p) + a_{n2}Y_2(p) + \dots + (p+a_{nn})Y_n(p) = F_n(p) + y_{n0}. \end{cases} \quad (2.176)$$

Решив эту систему, найдем изображения $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, ..., $Y_n(p)$, а затем и их оригиналы $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$.

Пример 2.30. Найти частное решение уравнения $y''+2y'+2y=2$ с начальными условиями $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

Решение. Применим преобразование Лапласа ко всем членам этого уравнения:

$$L[y''] + 2L[y'] + 2L[y] = L[2].$$

Используя формулу (2.42), найдем изображения производных $L[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$, $L[y''(t)] = pL[y'(t)] - y'(0) = p^2Y(p) - p - 3$. Тогда

$$p^2Y(p) - p - 3 + 2(pY(p) - 1) + 2Y(p) = \frac{2}{p}$$

или

$$Y(p)(p^2 + 2p + 2) = \frac{2}{p} + p + 5.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{2}{p((p+1)^2+1)} + \frac{p}{(p+1)^2+1} + \frac{5}{(p+1)^2+1} = \\ &= \frac{2}{p((p+1)^2+1)} + \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{4}{(p+1)^2+1}. \end{aligned}$$

Из табл. Б.2 прил. Б известно, что

$$\frac{1}{(p+1)^2+1} \doteq e^{-t} \sin t, \quad \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \doteq e^{-t} \cos t.$$

По теореме интегрирования оригинала $\frac{2}{p((p+1)^2+1)} \doteq 2 \int_0^t e^{-t} \sin t dt = 1 - e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Учитывая это, для искомого решения $y(t)$ запишем

$$y(t) = 1 - e^{-t}(\sin t + \cos t) + e^{-t}(\cos t + 4 \sin t) = 1 + 3e^{-t} \sin t.$$

Пример 2.31. Найти частное решение уравнения $y'' + \omega^2 y = a e^{-\alpha t^2}$ с нулевыми начальными условиями.

Решение. При тех же начальных условиях сначала решим уравнение $y_1'' + \omega^2 y_1 = h(t)$. Применяв к нему преобразование Лапласа, запишем $p^2 Y_1(p) + \omega^2 Y_1(p) = \frac{1}{p}$, откуда $Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)}$. Так как $\frac{1}{p^2 + \omega^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\omega} \sin \omega t$, то по теореме интегрирования оригинала

$$y_1(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau d\tau = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Теперь с помощью интеграла Дюамеля (2.172) находим

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) y_1'(t - \tau) d\tau = \frac{a}{\omega} \int_0^t e^{-\alpha \tau^2} \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Пример 2.32. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) + 2y_1(t) + 2y_2(t) & = e^t, \\ y_2'(t) + y_1(t) + 3y_2(t) & = 2, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$.

Решение. Применяв преобразование Лапласа к системе дифференциальных уравнений, получим линейную алгебраическую систему для изображений $Y_1(p)$, $Y_2(p)$:

$$\begin{cases} pY_1(p) - 1 + 2Y_1(p) + 2Y_2(p) & = \frac{1}{p-1}, \\ pY_2(p) + Y_1(p) + 3Y_2(p) & = \frac{2}{p}. \end{cases}$$

Преобразуем

$$\begin{cases} (p+2)Y_1(p) + 2Y_2(p) & = \frac{p}{p-1}, \\ Y_1(p) + (p+3)Y_2(p) & = \frac{2}{p}. \end{cases}$$

Найдем $Y_1(p)$, $Y_2(p)$ по формулам Крамера. Вычислим определители Δ , Δ_1 , Δ_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ 1 & p+3 \end{vmatrix} = (p+2)(p+3) - 2 = p^2 + 5p + 4 = (p+1)(p+4);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{p}{p-1} & 2 \\ \frac{2}{p} & p+3 \end{vmatrix} = \frac{p(p+3)}{p-1} - \frac{4}{p} = \frac{p^3 + 3p^2 - 4p + 4}{p(p-1)};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+2 & \frac{p}{p-1} \\ 1 & \frac{2}{p} \end{vmatrix} = \frac{2(p+2)}{p} - \frac{p}{p-1} = \frac{p^2 + 2p - 4}{p(p-1)}.$$

Отсюда находим формулы для изображений:

$$Y_1(p) = \frac{p^3 + 3p^2 - 4p + 4}{p(p-1)(p+1)(p+4)},$$

$$Y_2(p) = \frac{p^2 + 2p - 4}{p(p-1)(p+1)(p+4)}.$$

Корни многочлена в знаменателях $Y_1(p)$ и $Y_2(p)$ $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=1$, $p_4=-4$. По формуле (2.108) находим оригиналы $y_1(t)$, $y_2(t)$:

$$y_1(t) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{-p_k t} = A_1 + A_2 e^{-t} + A_3 e^t + A_4 e^{-4t},$$

$$y_2(t) = \sum_{k=1}^4 B_k e^{-p_k t} = B_1 + B_2 e^{-t} + B_3 e^t + B_4 e^{-4t}.$$

Коэффициенты A_k и B_k в соответствии с равенством (2.106) вычисляем по формулам

$$A_k = \lim_{p \rightarrow p_k} Y_1(p)(p - p_k), \quad B_k = \lim_{p \rightarrow p_k} Y_2(p)(p - p_k), \quad k=1, 2, 3, 4.$$

Например,

$$A_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p Y_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^3 + 3p^2 - 4p + 4}{(p-1)(p+1)(p+4)} = -1;$$

$$A_2 = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1) Y_1(p) = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p^3 + 3p^2 - 4p + 4}{p(p-1)(p+4)} = \frac{5}{3}.$$

Аналогично вычисляем все другие коэффициенты:

$$A_3 = \frac{2}{5}, \quad A_4 = -\frac{1}{15}, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -\frac{5}{6}, \quad B_3 = -\frac{1}{10}, \quad B_4 = -\frac{1}{15}.$$

Запишем теперь искомое решение:

$$y_1(t) = -1 + \frac{5}{3}e^{-t} + \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{15}e^{-4t},$$

$$y_2(t) = 1 - \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{1}{10}e^t - \frac{1}{15}e^{-4t}.$$

2.24. Расчет колебательного контура

Рассмотрим приложения преобразования Лапласа в теории цепей на примере колебательного контура.

Колебательным контуром называется электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных электрического сопротивления R , катушки с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C (рис. 2.19). Из курса физики известно, что напряжения $u(t)$, возникающие на концах элементов R , L и C при прохождении через них тока $i(t)$, равны соответственно

$$u(t) = Ri(t), \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{1}{C} \left(\int_0^t i(t) dt + q_0 \right), \quad (2.177)$$

где q_0 — начальный заряд конденсатора. Пусть в контур, в котором первоначально отсутствуют токи и заряды ($q_0 = 0$), в момент времени $t = 0$ включается напряжение $u(t)$, тогда по второму закону Кирхгофа в каждый момент времени должно выполняться равенство

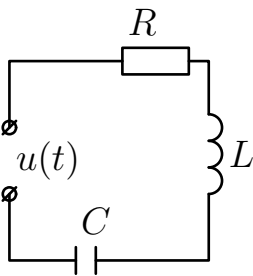


Рис. 2.19

$$R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = u(t). \quad (2.178)$$

Будем искать решение этого интегродифференциального уравнения при условии $i(0) = 0$ с помощью преобразования Лапласа. Обозначим $I(p) \doteq i(t)$, $U(p) \doteq u(t)$. Применив ко всем членам уравнения (2.178) преобразование Лапласа с учетом свойства линейности, теорем дифференцирования и интегрирования оригинала, запишем

$$R \cdot I(p) + LpI(p) + \frac{1}{Cp}I(p) = U(p)$$

или

$$I(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) = U(p). \quad (2.179)$$

Величина $Z = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ называется операторным сопротивлением цепи или импеданцем. Изображения тока I , напряжения U и Z связаны зависимостью, аналогичной закону Ома:

$$I(p)Z = U(p). \quad (2.180)$$

Далее исследуем подробно частный случай – включение в контур в момент времени $t=0$ постоянного единичного напряжения

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

В этом случае $U(p) = \frac{1}{p}$. Обозначим возникающий при этом ток $i_1(t)$, а его изображение $I_1(p)$, тогда из уравнения (2.179) имеем

$$I_1(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) = \frac{1}{p} \text{ или } I_1(p) = \frac{1}{pZ}. \quad (2.181)$$

Отсюда

$$I_1(p) = \frac{1}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}. \quad (2.182)$$

Для нахождения оригинала $i_1(t)$ найдем корни p_1, p_2 квадратного трехчлена $Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}$ и их разность:

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{D}}{2L}, \quad (2.183)$$

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{D}}{2L}, \quad (2.184)$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\sqrt{D}}{L}. \quad (2.185)$$

Здесь возможны три случая: дискриминант $D = R^2 - \frac{4L}{C}$ квадратного трехчлена положителен, равен нулю или отрицателен.

Пусть $D = R^2 - \frac{4L}{C} > 0$. Тогда $p_1 \neq p_2$ – действительные числа и, разложив трехчлен на множители, из уравнения (2.182) следует

$$I_1(p) = \frac{1}{L(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{1}{L(p_1-p_2)} \left(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right). \quad (2.186)$$

Найдя оригинал для $I_1(p)$, запишем

$$i_1(t) = \frac{1}{L(p_1-p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (2.187)$$

Принимая во внимание равенства (2.183)–(2.185), окончательно получаем

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{D}} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \left(\exp\left(\frac{t}{2L}\sqrt{D}\right) - \exp\left(-\frac{t}{2L}\sqrt{D}\right) \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{D}} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{t}{2L}\sqrt{D}\right). \end{aligned} \quad (2.188)$$

Эта формула описывает затухающий аperiодический процесс.

Если $D = R^2 - \frac{4l}{C} = 0$, то $p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L}$, тогда из формулы (2.182)

$$I_1(p) = \frac{1}{L(p-p_1)^2}. \quad (2.189)$$

Поскольку $\frac{1}{(p-p_1)^2} \doteq te^{p_1 t}$, то

$$i_1(t) = \frac{t}{L} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right). \quad (2.190)$$

Здесь тоже изменение тока во времени представляет затухающий аperiодический процесс.

Пусть теперь $D = R^2 - \frac{4L}{C} < 0$. Преобразуем квадратный трехчлен в формуле (2.182):

$$\begin{aligned} Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} &= L \left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} \right) = \\ &= L \left(p^2 + 2\frac{R}{2L}p + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \right) = \\ &= L \left(\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{4L^2C} (4L - R^2C) \right). \end{aligned} \quad (2.191)$$

Обозначим $\frac{4L - R^2C}{4L^2C}$ в уравнении (2.191) как ω^2 и представим $I_1(p)$ в виде

$$I_1(p) = \frac{1}{L \left(\left(p + \frac{R}{2L}\right)^2 + \omega^2 \right)}. \quad (2.192)$$

По таблице находим оригинал:

$$i_1(t) = \frac{1}{L\omega} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \sin \omega t. \quad (2.193)$$

Формула (2.193) задает затухающие гармонические колебания с частотой ω и начальной амплитудой, равной $\frac{1}{\omega L}$.

Отметим особую роль интеграла Дюамеля при расчете контуров. Считая изображение тока $I_1(p)$ известным, выразим Z из уравнения (2.181):

$$Z = \frac{1}{pI_1(p)}. \quad (2.194)$$

Затем, подставив Z в формулу (2.180), найдем изображение тока $I(p)$, возникающего при включении в контур произвольного напряжения $u(t)$:

$$I(p) = pI_1(p)U(p). \quad (2.195)$$

Отсюда по формулам Дюамеля (2.62), (2.63) выразим $i(t)$:

$$i(t) = \int_0^t u(t)i'(t-\tau) d\tau = i_1(t)u(0) + \int_0^t i_1(\tau)u'(t-\tau) d\tau. \quad (2.196)$$

Таким образом, зная ток $i_1(t)$ в контуре при включении единичного напряжения, по формуле (2.196) сразу можем написать значение тока в этом контуре при включении в него любого напряжения $u(t)$, являющегося функцией-оригиналом. Более того, если "отклик" контура $i_1(t)$ на единичное воздействие $h(t)$ известен из опыта, то при расчетах тока при других воздействиях $u(t)$ не нужно знать значения параметров R , L и C , так как они неявным образом учтены в экспериментальной зависимости $i_1(t)$. Перепишем формулу (2.181) в следующем виде:

$$pI_1(p) = \frac{1}{Z}. \quad (2.197)$$

Далее, используя предельные соотношения (2.120) и (2.123), запишем

$$i_1(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pI_1(p) = \frac{1}{\lim_{p \rightarrow \infty} Z}, \quad (2.198)$$

$$i_1(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pI_1(p) = \frac{1}{\lim_{p \rightarrow 0} Z}. \quad (2.199)$$

Соотношения (2.198), (2.199) удобны для проверки правильности нахождения оригиналов.

2.25. Решение интегральных уравнений Вольтерра с помощью преобразования Лапласа

Интегральным называется уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла. Преобразование Лапласа, позволяет найти решение уравнений

$$y(t) - \lambda \int_0^t r(t-\tau)y(\tau) d\tau = f(t), \quad (2.200)$$

$$\lambda \int_0^t r(t-\tau)y(\tau) d\tau = f(t). \quad (2.201)$$

Уравнения (2.200) и (2.201) называются соответственно уравнениями Вольтерра первого и второго рода. Здесь $y(t)$ – искомая функция, $r(t)$, $f(t)$ – заданные функции, причем функция $r(t)$ называется ядром интегрального уравнения, λ – константа.

Обозначим $L[y(t)] = Y(p)$, $L[r(t)] = R(p)$, $L[f(t)] = F(p)$. Предполагается, что функции $y(t)$, $f(t)$, $r(t)$ являются оригиналами. Применим к обеим частям уравнения (2.200) преобразование Лапласа с учетом свойства линейности и теоремы умножения изображений, получим уравнение первой степени для $Y(p)$:

$$Y(p) - \lambda R(p)Y(p) = F(p), \quad (2.202)$$

откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda R(p)}. \quad (2.203)$$

Поступая аналогично, из уравнения (2.201), находим

$$\lambda R(p)Y(p) = F(p), \quad (2.204)$$

откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{\lambda R(p)}. \quad (2.205)$$

Теперь решением уравнения (2.200) является функция

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{F(p)}{1 - \lambda R(p)} \right], \quad (2.206)$$

а решением уравнения (2.201) –

$$y(t) = L^{-1} \left[\frac{F(p)}{\lambda R(p)} \right]. \quad (2.207)$$

Пример 2.33. Найти решение уравнения

$$y(t) = \cos 3t + \int_0^t y(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau.$$

Решение. Применив преобразование Лапласа ко всем членам уравнения и учитывая, что $\cos 3t \doteq \frac{p}{p^2+9}$, $e^{-t} \doteq \frac{1}{p+1}$, а также теорему умножения изображений, имеем

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+9} + \frac{Y(p)}{p+1},$$

отсюда

$$Y(p) = \frac{p+1}{p^2+9} = \frac{1}{p^2+9} + \frac{p}{p^2+9}, \quad y(t) = \frac{1}{3} \sin 3t + \cos 3t.$$

Пример 2.34. Найти решение уравнения

$$\operatorname{sh} t = \int_0^t \cos(t-\tau) y(\tau) d\tau.$$

Решение. Применив преобразование Лапласа, запишем

$$\frac{1}{p^2-1} = \frac{p}{p^2+1} Y(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{p(p^2-1)} = \frac{p^2-1+2}{p(p^2-1)} = \frac{1}{p} + \frac{2}{p(p^2-1)}.$$

Так как $\frac{1}{p} \doteq h(t)$, $\frac{1}{p^2-1} \doteq \operatorname{sh}(t)$, $\frac{1}{p(p^2-1)} = \int_0^t \operatorname{sh}(t) dt = \operatorname{ch} t - h(t)$, то иско-
мое решение $y(t) = 2 \operatorname{ch}(t) - h(t)$.

2.26. Уравнения в частных производных

Метод преобразования Лапласа успешно используется в решении нестационарных задач для уравнений математической физики. Процесс применения интегрального преобразования Лапласа однотипен для задач самого различного физического характера и не требует особого подхода и изобретательности для каждого нового типа задач, не зависит от

геометрических особенностей проблемы. При этом понижается размерность задачи и автоматически учитываются начальные условия. В частности, метод позволяет получать решение в удобной для расчета форме при малых и больших значениях времени.

Для простоты ограничимся изложением случая, когда неизвестная функция $u(x, t)$ зависит только от координаты x и времени t , и рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu + A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (2.208)$$

Здесь a, b, c, A, B – заданные числа, причем $a > 0$. Будем искать $u(x, t)$ – решение уравнения (2.208) для $0 \leq x \leq l, t \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (2.209)$$

и граничным условиям

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t), \quad (2.210)$$

где α, β, γ – константы. Если $l = \infty$, то второе условие (2.210) отпадает.

Предположим, что $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ являются оригиналами, причем

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt. \quad \text{Тогда}$$

$$L \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU(x, p)}{dx},$$

$$L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt} dt = \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}.$$

Изображения производных по времени с учетом начальных условий (2.209) представим в виде

$$L \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = pU(x, p) - \varphi(x),$$

$$L \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = p^2 U(x, p) - p\varphi(x) - \psi(x).$$

Таким образом, применив преобразование Лапласа ко всем членам уравнения (2.208), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для $U(x, p)$:

$$a \frac{d^2 U}{dx^2} + b \frac{dU}{dx} + MU + N = 0, \quad (2.211)$$

здесь $M = c + Ap^2 + Bp$, $N = -Ap\varphi(x) - B\psi(x)$. Полагая, что $f(t)$ является оригиналом и $f(t) \doteq F(p)$, запишем граничные условия для уравнения (2.211), применив преобразование Лапласа к условиям (2.210):

$$U(0, p) = F(p), \quad \left[\alpha \frac{dU}{dx} + (\beta p - \gamma)U - \beta\varphi(x) \right]_{x=l} = 0. \quad (2.212)$$

Если известно, что нестационарная задача имеет единственное решение и функция $u(x, t)$ вместе со своими производными первого и второго порядков являются оригиналами, а уравнение (2.211) с условиями (2.212) тоже имеет решение, то искомое решение нестационарной задачи можно получить как оригинал для $U(x, p)$.

Пример 2.35. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.213)$$

для полуограниченного стержня $0 \leq x < \infty$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня равна нулю, а температура на левом конце меняется во времени по известному закону $f(t)$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = f(t). \quad (2.214)$$

Здесь a – коэффициент температуропроводности материала стержня.

Решение. Обозначим $U(x, p) \doteq u(x, t)$, $F(p) \doteq f(t)$. Переходя к изображениям в уравнении (2.213) и граничных условиях (2.214) получаем

$$pU(x, p) = a \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}, \quad (2.215)$$

$$U(0, p) = F(p). \quad (2.216)$$

Общее решение уравнение (2.215) имеет вид

$$U(x, p) = C_1 e^{x\sqrt{p/a}} + C_2 e^{-x\sqrt{p/a}}, \quad (2.217)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Функция $U(p, x)$ должна быть ограниченной при $x \rightarrow \infty$, поэтому в формуле (2.217) $C_1 = 0$. Условие (2.216) дает, что $C_2(p) = F(p)$, следовательно,

$$U(x, p) = F(p) e^{-x\sqrt{p/a}}. \quad (2.218)$$

Рассмотрим частный случай, когда температура на левом конце стержня в момент времени $t=0$ становится равной единице и в дальнейшем не меняется, т. е. в граничном условии (2.214) $f(t)=h(t)$, а $F(p)=\frac{1}{p}$. Тогда изображение температуры $U_1(x, p)$ для этого случая

$$U_1(x, p) = \frac{1}{p} e^{-x\sqrt{p/a}}. \quad (2.219)$$

Оригинал для этого изображения запишем, используя соответствие (2.71):

$$u_1(x, t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-\theta^2} d\theta = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (2.220)$$

Чтобы найти температуру при произвольном граничном условии (2.214), используем интеграл Дюамеля.

Из формулы (2.219) найдем $e^{-x\sqrt{p/a}} = p(U_1(x, p))$ и подставим в равенство (2.218):

$$U(x, p) = pF(p)U_1(x, p). \quad (2.221)$$

Запишем по формуле (2.62)

$$pF(p)U_1(x, p) = u_1(x, 0) \cdot f(t) + \int_0^t u_1'(x, \tau) f(t-\tau) d\tau. \quad (2.222)$$

Из равенства (2.220) следует, что $u_1(x, 0) = 1 - \operatorname{erf}(\infty) = 0$, $\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \frac{x}{2\sqrt{a\pi t^3}} e^{-x^2/4at}$, поэтому по соответствию (2.222)

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t (t-\tau)^{-3/2} e^{-x^2/4a\tau} d\tau. \quad (2.223)$$

2.27. Расчет длинных линий

Рассмотрим двухпроводную длинную линию как систему равномерно распределенных сопротивлений, емкостей, индуктивностей и утечек. И величины, отнесенные к единице длины обозначим соответственно

R, C, L, G . На участке линии $(x; x + \Delta x)$ для приращения тока i и напряжения u будем иметь

$$u(t, x) - u(t, x + \Delta x) = L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t} + R\Delta x \cdot i, \quad (2.224)$$

$$i(t, x) - i(t, x + \Delta x) = C\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} + G\Delta x \cdot u. \quad (2.225)$$

Поделив все члены уравнений (2.225), (2.224) на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial u}{\partial t} + Gu. \quad (2.226)$$

Систему дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (2.226) принято называть телеграфными уравнениями.

Начальные условия для системы (2.226):

$$i(0, x) = i_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (2.227)$$

Полагая длину линии равной l , запишем граничные условия для системы (2.226):

$$u(t, 0) = f_1(t), \quad u(t, l) = f_2(t). \quad (2.228)$$

Обозначим через $I(p)$ и $U(p)$ соответственно изображения по времени тока и напряжения и, применив преобразование Лапласа ко всем членам системы (2.226), с учетом начальных условий (2.227), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(LP + R)I(p, x) = -\frac{dU(p, x)}{dx} + Li_0(x), \quad (2.229)$$

$$(CP + G)U(p, x) = -\frac{dI(p, x)}{dx} + Cu_0(x). \quad (2.230)$$

Пусть далее

$$f_1(t) \doteq F_1(p), \quad f_2(t) \doteq F_2(p).$$

Тогда, преобразовав по Лапласу граничные условия (2.228), получим граничные условия для уравнений (2.229), (2.230):

$$U(p, 0) = F_1(p), \quad U(p, l) = F_2(p). \quad (2.231)$$

Для решения системы выразим изображение тока $I(p)$ из уравнения (2.229) и подставим в уравнение (2.230):

$$\frac{d^2U(p, x)}{dx^2} - \gamma^2 U(p, x) = L \frac{di_0(x)}{dx} + C(LP + R)u_0(x), \quad (2.232)$$

где $\gamma^2 = (Lp + R)(Cp + G)$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.232) можно найти методом вариации произвольных постоянных и представить в виде

$$U(p, x) = A(p, x)e^{\gamma x} + B(p, x)e^{-\gamma x}, \quad (2.233)$$

где $A(p, x)$, $B(p, x)$ – известные функции.

Однако в этом случае выражение для $U(p, x)$ будет слишком сложным и для перехода от изображения к оригиналу потребуются специальные приемы громоздких вычислений.

Если принять, что первоначально в линии отсутствовали токи и напряжения, т. е. $i_0 = u_0 = 0$, тогда уравнение (2.232) будет однородным и в его решении (2.233) величины A и B будут зависеть только от p :

$$U(p, x) = A(p)e^{\gamma x} + B(p)e^{-\gamma x}. \quad (2.234)$$

Подчинив уравнение (2.234) граничным условиям (2.231), получим систему алгебраических уравнений для A и B :

$$A + B = F_1(p), \quad (2.235)$$

$$Ae^{\gamma l} + Be^{-\gamma l} = F_2(p). \quad (2.236)$$

Откуда

$$A(p) = \frac{F_1(p) - F_2(p)e^{\gamma l}}{1 - e^{2\gamma l}}, \quad B(p) = \frac{F_1(p) - F_2(p)e^{-\gamma l}}{1 - e^{-2\gamma l}}. \quad (2.237)$$

Однако и в этом случае нахождение оригинала представляет очень сложную задачу. Поэтому для упрощения вычислений предположим, что длина линии не ограничена, т. е. $l = \infty$. Физически это означает, что мы пренебрегаем отражением волн на конце линии. Тогда второе граничное условие (2.228) отпадает и заменяется требованием ограниченности $U(p, x)$, $I(p, x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Полагая, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$, видим, что $e^{\gamma x} \rightarrow \infty$, если $x \rightarrow \infty$. Тогда по условию ограниченности $U(p, x)$ в уравнении (2.234) принимаем $A(p) = 0$ и из уравнений (2.234), (2.235) находим

$$U(p, x) = F_1(p)e^{-\gamma x}, \quad (2.238)$$

где $\gamma = \sqrt{(Lp + R)(Cp + G)}$. Теперь, подставив $U(p, x)$ в уравнение (2.229), найдем $I(p, x)$:

$$I(p, x) = \sqrt{\frac{Cp + G}{Lp + R}} \cdot U(p, x). \quad (2.239)$$

Рассмотрим два частных случая.

Пример 2.36. Рассмотрим бесконечно длинную линию без потерь индуктивности и утечек (кабель).

Решение. Так как $L=G=0$, то $\gamma = \sqrt{RCp}$ и из уравнений (2.238), (2.239)

$$U(p, x) = F_1(p)e^{-x\sqrt{RCp}}, \quad (2.240)$$

$$I(p, x) = \sqrt{\frac{Cp}{R}}F_1(p)e^{-x\sqrt{CRp}}. \quad (2.241)$$

Возьмем $f_1(t) = E$, тогда $F_1(p) = \frac{E}{p}$, т. е. на левом конце включается постоянная ЭДС. Тогда из уравнений (2.240), (2.241) следует

$$U(p, x) = \frac{E}{p}e^{-x\sqrt{RCp}}, \quad (2.242)$$

$$I(p, x) = E\sqrt{\frac{C}{Rp}}e^{-x\sqrt{CRp}}. \quad (2.243)$$

По формулам (2.76) и (2.81) находим оригиналы:

$$u_1(t, x) = E \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) \right), \quad (2.244)$$

$$i_1(t, x) = E\sqrt{\frac{C}{R\pi t}} \exp \left(-\frac{CRx^2}{4t} \right). \quad (2.245)$$

Чтобы найти напряжение при включении произвольного напряжения $f_1(t)$, используем интеграл Дюамеля (2.62), сделав замену $\xi = \frac{x\sqrt{BC}}{2\sqrt{t-\tau}}$:

$$u(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{\infty} f_1 \left(t - \frac{RCx^2}{4t\xi^2} \right) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (2.246)$$

Пример 2.37. Рассмотрим бесконечно длинную линию без потерь ($R=G=0$).

Решение. В этом случае

$$U(p, x) = F_1(p)e^{-px\sqrt{LC}}, \quad I(p, x) = \sqrt{\frac{C}{L}}U(p, x).$$

Отсюда для $u(t, x)$ по теореме запаздывания имеем

$$u(t, x) = f_1(t - x\sqrt{LC}), \quad i(t, x) = \sqrt{\frac{C}{L}}f_1(t - x\sqrt{LC}).$$

Из этих формул видим, что процесс распространения напряжения тока вдоль линии имеет волновой характер со скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, причем волны тока и напряжения не меняют формы при движении.

2.28. Теоремы о свойствах равномерно сходящихся несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом

При изучении интегралов, зависящих от параметра, к которым относится и интеграл Лапласа (2.1), важную роль играет понятие равномерной сходимости интеграла.

Предположим, что функция $f(t, x)$ задана при всех $t \geq a$ и всех x из некоторой области X . Пусть, далее, для любого $x \in X$ существует интеграл

$$I(x) = \int_a^{\infty} f(t, x) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t, x) dt. \quad (2.247)$$

Определение 2.4. Интеграл (2.247) называется равномерно сходящимся в области X , если для любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется зависящее только от ε число $N(\varepsilon) \geq a$, такое, что для всех $b > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left| \int_a^{\infty} f(t, x) dt - \int_a^b f(t, x) dt \right| = \left| \int_b^{\infty} f(t, x) dt \right| < \varepsilon \quad (2.248)$$

для всех значений $x \in X$.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости интеграла (2.247).

Теорема 2.24. Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна по t при $t \geq a$. Если существует зависящая лишь от t функция $\varphi(t)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(t) dt$, причем при всех x из множества X имеет место неравенство $|f(t, x)| \leq \varphi(t)$, $t \geq a$, то интеграл (2.247) сходится равномерно относительно x в области X .

Ниже приведены без доказательства теоремы о свойствах равномерно сходящихся интегралов, которые были использованы при дока-

зательстве утверждений, относящихся к интегральному преобразованию Лапласа [23].

Условия, достаточные для допустимости предельного перехода под знаком интеграла, распространенного на бесконечный промежуток, даются следующей теоремой.

Теорема 2.25. Пусть функция $f(t, x)$ определена для $t \geq a$ и для всех x из множества X и непрерывна по t . При $x \rightarrow x_0$ равномерно относительно по t в каждом конечном промежутке $[a, A]$ стремится к предельной функции $\varphi(t) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x)$. Если, кроме этого, интеграл $\int_a^\infty f(t, x) dx$ сходится равномерно относительно $x \in X$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^\infty f(t, x) dt = \int_a^\infty \lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x) dt. \quad (2.249)$$

Возможность изменения порядка интегрирования при интегрировании несобственного интеграла по параметру обусловлена следующей теоремой.

Теорема 2.26. Пусть функция $f(t, x)$ определена и непрерывна для $t \geq a$ и $x \in [c, d]$. Если интеграл $\int_a^\infty f(t, x) dx$ сходится равномерно относительно x в промежутке $[c, d]$, то имеет место равенство

$$\int_c^d \left(\int_a^\infty f(t, x) dt \right) dx = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt. \quad (2.250)$$

Возможность дифференцирования интеграла по параметру обосновывается следующей теоремой.

Теорема 2.27. Пусть функция $f(t, x)$ определена при $t \geq a$, $x \in [c, d]$ и для указанных значений t, x , $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ непрерывна по обоим аргументам. Кроме того, интегралы $\int_a^\infty f(t, x) dx$, $\int_a^\infty \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dx$ существуют и сходятся равномерно для всех $x \in [c, d]$. Тогда имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^\infty f(t, x) dt = \int_a^\infty \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dx. \quad (2.251)$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Упражнения

1. Показать, что функция $f(t) = \sin 2t \cdot h(t)$ является оригиналом.
2. Какие из перечисленных функций являются функциями-оригиналами: e^{2t} , $\operatorname{tg} t$, $\frac{1}{t-2}$?
3. Каково соответствие между оригиналом и изображениями: взаимно однозначное или просто однозначное?
4. Могут ли две различные непрерывные функции иметь одно и то же изображение?
5. Пользуясь определением, найти изображение функции $f(t) = t \cdot h(t)$.
6. Используя свойство линейности, записать изображение функции $h(t) + t \cdot h(t)$.
7. Пользуясь теоремами подобия и линейности, найти изображения следующих функций: $\cos at$, $\cos^2 at$, если известно, что $\cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}$.
8. Если $F(p) \doteq f(t)$, то какое изображение будет иметь $f(at)$? Доказать теорему подобия и найти изображения функций $\sin at$ и $\cos at$, считая известными изображения функций $\sin t$ и $\cos t$ ($a > 0$).
9. Используя теорему запаздывания, найти изображения следующих функций:

$$\text{а) } \sin(t-a) \cdot h(t-a), \quad \text{б) } f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

10. Найти изображение периодического оригинала

$$f(t) = \begin{cases} M, & 0 < t < t_0, \\ -M, & t_0 < t < 2t_0, \end{cases} \quad f(t+2t_0) = f(t).$$

11. Если $F(p) \doteq f(t)$ ($f(t) = 0$ при $t \leq 0$), то какое изображение будет иметь $f(t-t_1)$, $t_1 > 0$? Доказать теорему запаздывания.
12. Найти изображение функции $h(t+2)$.
13. Найти изображение $t^n e^{at}$, если известно, что $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$.
14. Если $F(p) \doteq f(t)$, то какое изображение будет иметь $e^{-at} f(t)$? Доказать теорему затухания.

15. Как записать изображение $f^{(n)}(t)$, если известно изображение $f(t)$?

16. Можно ли найти изображение $\cos \omega t$, используя изображение $\sin \omega t$ и теорему дифференцирования оригинала? Если да, то найти это изображение.

17. Доказать теорему дифференцирования оригинала. Если $F(p) \doteq f(t)$, то какие изображения будут иметь производные $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$ (при условии, что $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$ существуют при всех $t > 0$)?

18. Сформулировать теорему интегрирования оригинала. Найти изображение t^n , n – натуральное число, если известно $h(t) \doteq \frac{1}{p}$.

19. Найти изображение $f(t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$.

20. Если $F(p) \doteq f(t)$, то какое изображение будет иметь $\int_0^t f(\tau) d\tau$?

Доказать теорему об интегрировании оригинала. Найти с помощью этой теоремы изображение функции $\sin at$.

21. Найти изображение функции $\int_0^t \sin(t-\tau)\tau d\tau$.

22. Используя формулу Дюамеля, найти оригинал по его изображению $\frac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

23. Если $F_1(p) \doteq f_1(t)$ и $F_2(p) \doteq f_2(t)$, то какое изображение будет иметь $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau) d\tau$? Доказать теорему о свертке.

24. Если продифференцировать изображение некоторого оригинала, то будет ли производная служить изображением какой-либо функции? Если будет, то какой именно?

25. Используя теорему дифференцирования изображения, найти изображение $t^2 \sin at$, если известно, что $\sin at \doteq \frac{a}{p^2+a^2}$.

26. Если $F(p) \doteq f(t)$, то какие оригиналы будут соответствовать $F'(p)$, $F''(p)$, $F'''(p)$? Доказать теорему о дифференцировании изображения. Найти с помощью этой теоремы изображение функции $t^n e^{at}$, считая известным изображение функции e^{at} .

27. Найти изображение функции $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$.

28. Можно ли применить теорему интегрирования изображения к формуле $e^{at} \doteq \frac{1}{p-a}$? Если нет, то почему?

29. Найти оригинал для изображения $\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ (Ответ: $\frac{1-e^{-t}}{t}$).

30. Найти оригинал для $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$, используя вторую теорему разложения 2.15.

31. Проверить, справедливы ли предельные соотношения (2.120), (2.121) для следующих функций: $h(t)$, $\sin t$.

32. Используя формулу (2.126), вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{2} dt$.

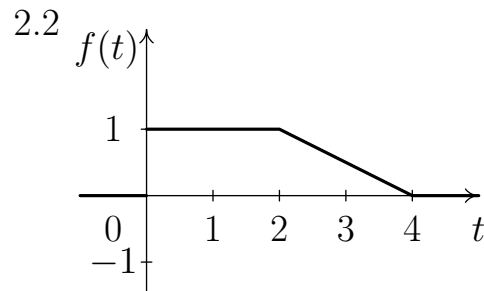
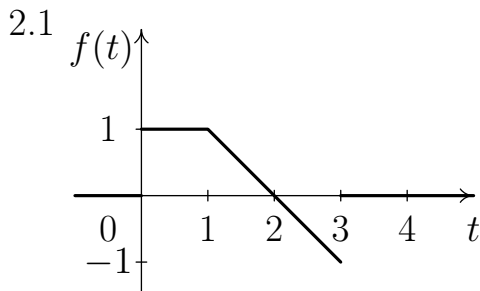
33. Записать при помощи интеграла Дюамеля решение уравнения $x'' + x = f(t)$ при нулевых начальных условиях, т. е. при $x(0) = x'(0) = 0$.

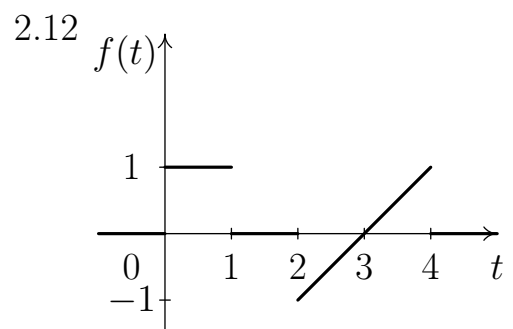
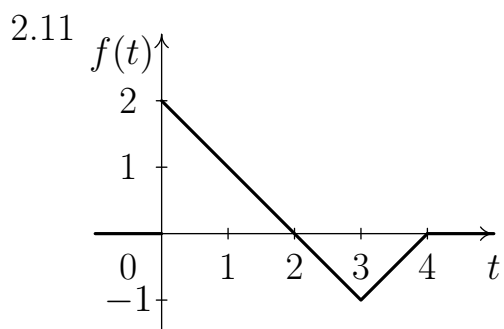
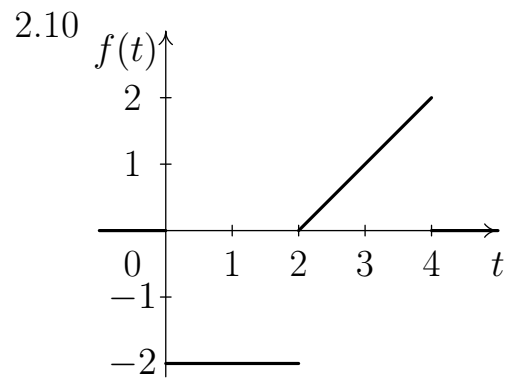
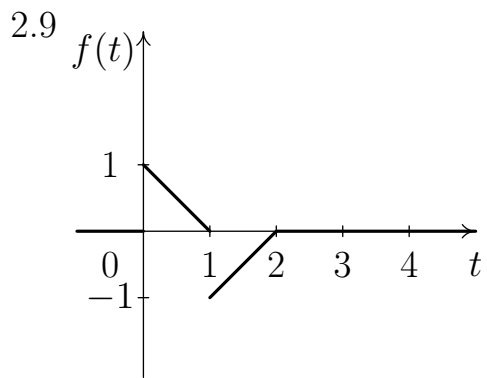
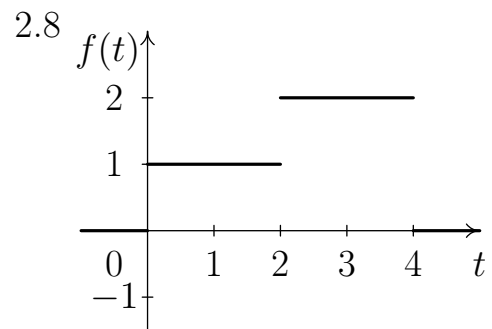
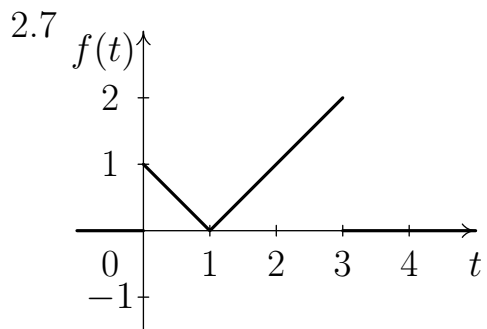
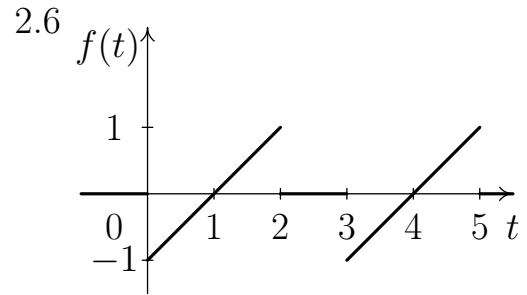
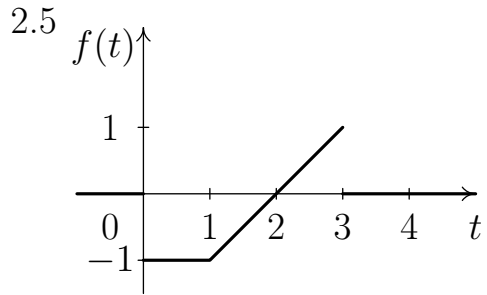
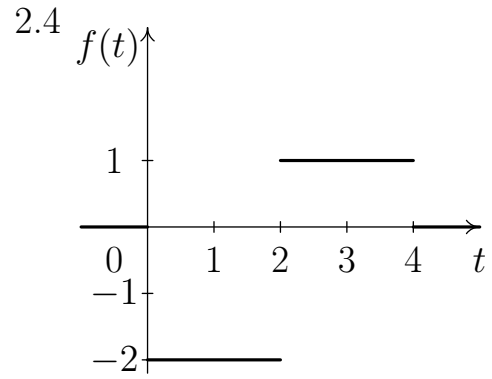
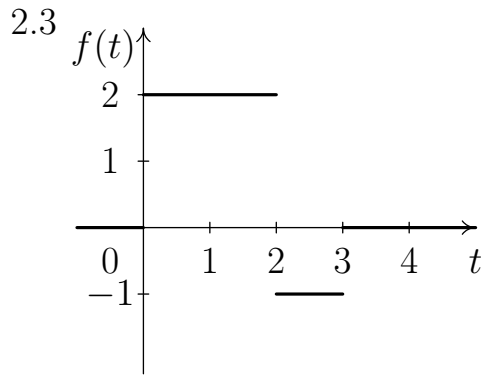
Задачи

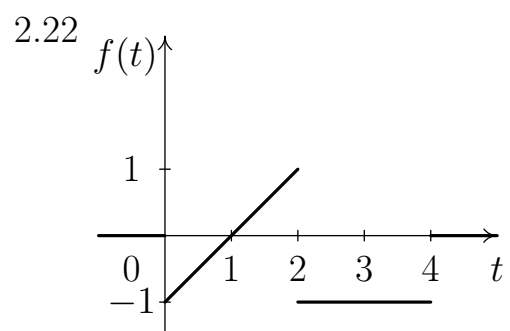
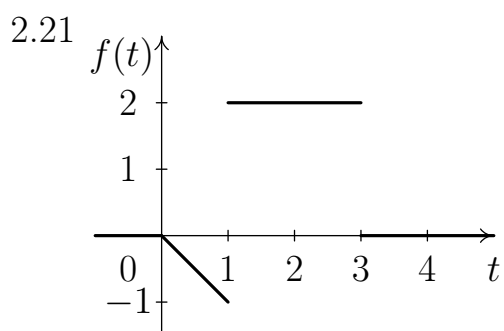
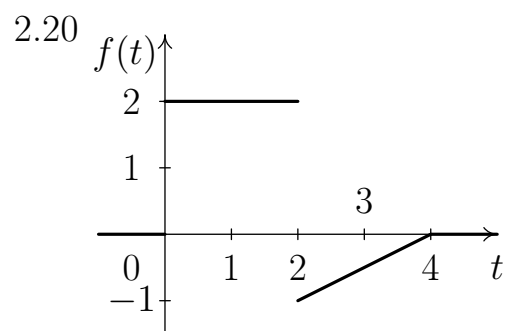
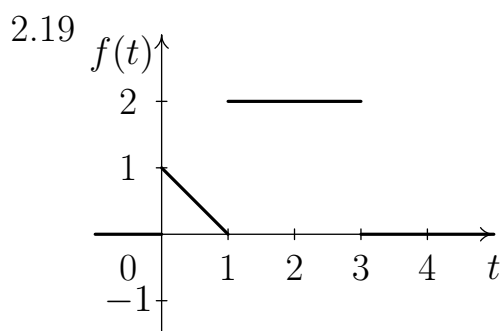
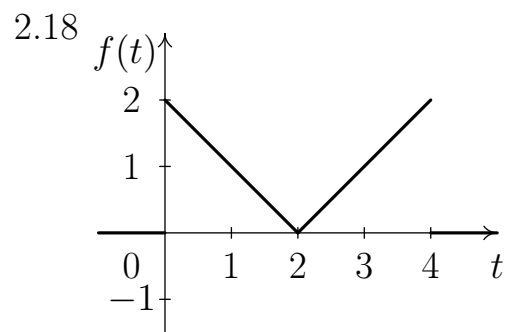
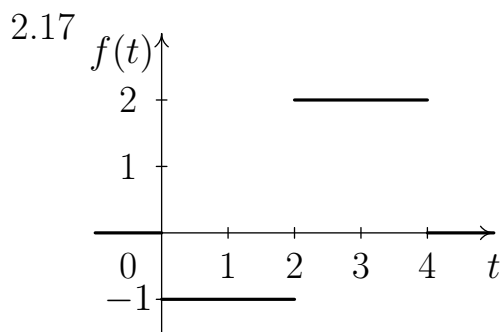
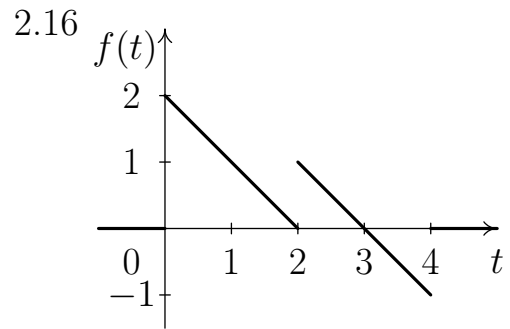
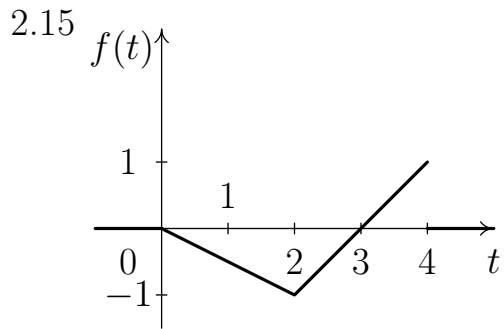
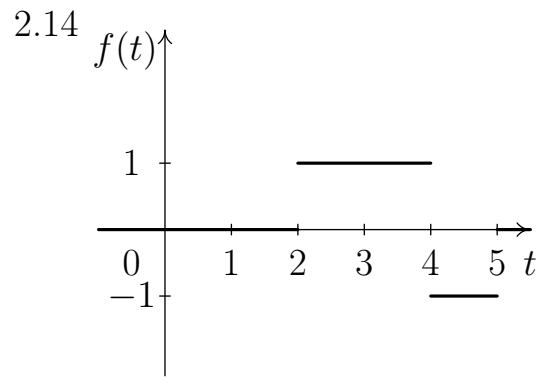
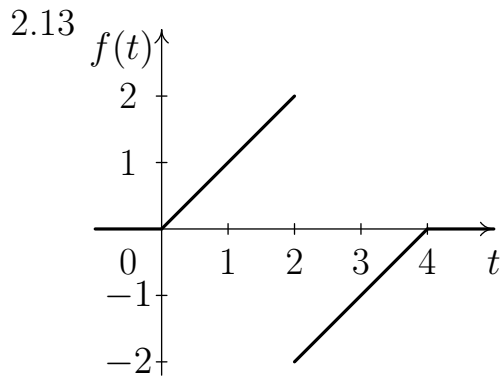
1. Пользуясь определением и свойствами преобразования Лапласа, найти изображения следующих функций:

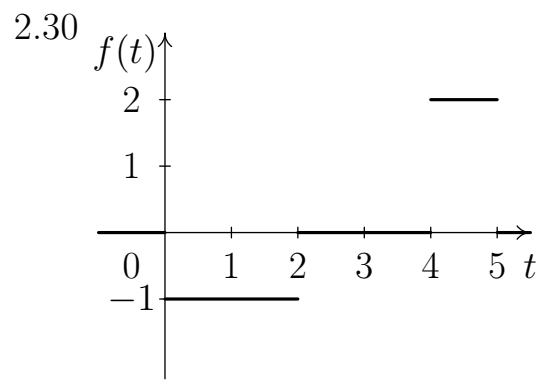
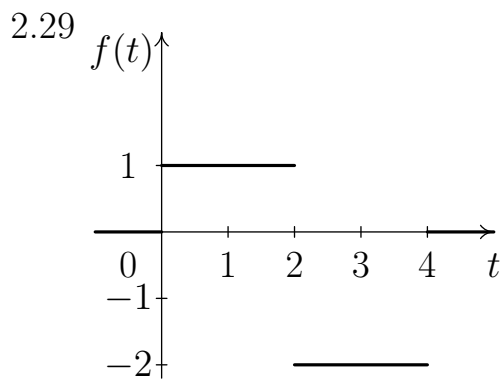
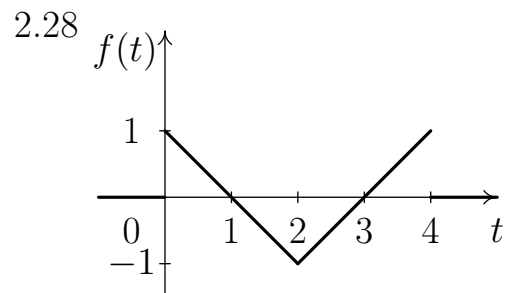
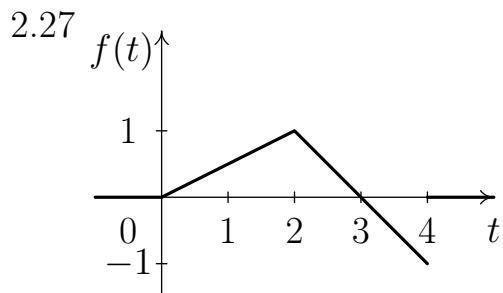
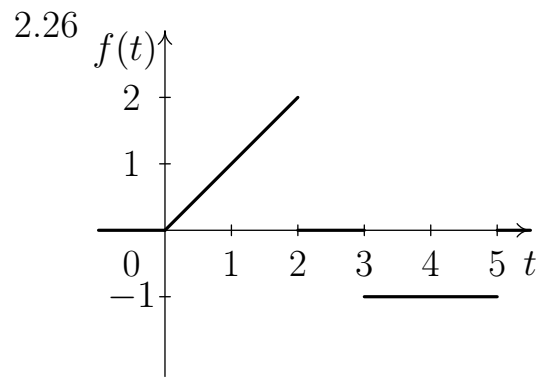
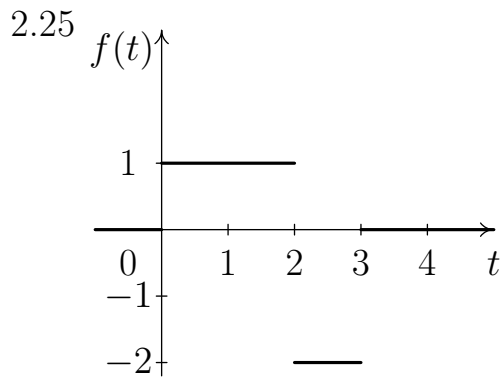
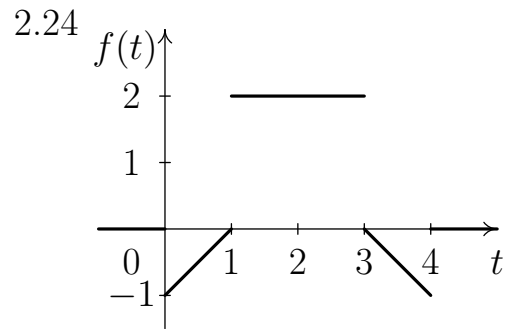
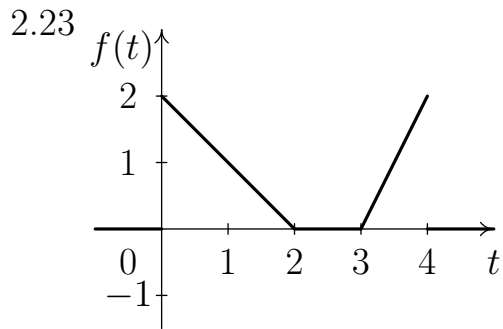
- | | | | | | |
|------|----------------------------------|------|---------------------------------|------|----------------------------------|
| 1.1 | $f(t) = t$. | 1.2 | $f(t) = \sin t$. | 1.3 | $f(t) = \cos t$. |
| 1.4 | $f(t) = \operatorname{sh} t$. | 1.5 | $f(t) = \operatorname{ch} t$. | 1.6 | $f(t) = e^t$. |
| 1.7 | $f(t) = 2^t$. | 1.8 | $f(t) = t^2$. | 1.9 | $f(t) = \sin 2t$. |
| 1.10 | $f(t) = \cos 2t$. | 1.11 | $f(t) = \operatorname{sh} 2t$. | 1.12 | $f(t) = \operatorname{ch} 2t$. |
| 1.13 | $f(t) = 3^t$. | 1.14 | $f(t) = 1 - 2t$. | 1.15 | $f(t) = \sin 3t$. |
| 1.16 | $f(t) = \cos 3t$. | 1.17 | $f(t) = t - \sin t$. | 1.18 | $f(t) = te^t$. |
| 1.19 | $f(t) = t - e^t$. | 1.20 | $f(t) = e^{-5t}$. | 1.21 | $f(t) = \sin^2 t$. |
| 1.22 | $f(t) = t \operatorname{sh} t$. | 1.23 | $f(t) = \cos^2 t$. | 1.24 | $f(t) = t \operatorname{ch} t$. |
| 1.25 | $f(t) = \sin 3t$. | 1.26 | $f(t) = \cos 3t$. | 1.27 | $f(t) = \operatorname{sh} 3t$. |
| 1.28 | $f(t) = 2t - e^{2t}$. | 1.29 | $f(t) = 5^t$. | 1.30 | $f(t) = te^{-2t}$. |

2. По данному графику функции-оригинала найти изображение:









3. Найти изображения функций:

3.1 а) $2 \sin t - \cos 3t$;

б) $t^2 \cos t$; в) $\sin(t-2) \cdot h(t-3)$;

г) $\int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau$;

д) $\int_0^t \tau \operatorname{sh} 2(t-\tau) d\tau$.

3.2 а) $t^2 e^t$;

б) $t^2 \sin t$; в) $\cos(t-3) \cdot h(t-2)$;

г) $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$;

д) $\int_0^t \tau^2 e^{-(t-\tau)} d\tau$.

- 3.3 a) $\frac{1}{2}te^{-t} + 2 \sin 2t$; б) $t^2 \operatorname{sh} t$; в) $\sin(t-3) \cdot h(t-2)$;
 г) $\int_0^t e^{t-\tau} \sin \tau d\tau$; д) $\int_0^t e^\tau \sin \tau d\tau$.
- 3.4 a) $t - \sin 3t$; б) $t^2 \operatorname{ch} t$; в) $\cos(t-2) \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t e^{-\tau} \sin \tau d\tau$; д) $\int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau$.
- 3.5 a) $t + 2 \sin 3t$; б) $t^2 \cos t$; в) $e^{t-2} \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t (t-\tau) \operatorname{sh} 2\tau d\tau$; д) $\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$.
- 3.6 a) $e^{2t} \sin t$; б) $t^2 \sin 2t$; в) $t \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau$; д) $\int_0^t (t-\tau)e^{-\tau} d\tau$.
- 3.7 a) $e^t \sin 3t$; б) $t^2 \operatorname{ch} 2t$; в) $t \cdot h(t-2)$;
 г) $\int_0^t (t-\tau)^3 e^{-\tau} d\tau$; д) $\int_0^t \tau^3 e^{-\tau} d\tau$.
- 3.8 a) $e^{2t} \cos 3t$; б) $t^2 \operatorname{sh} 2t$; в) $(t-1) \cdot h(t-2)$;
 г) $\int_0^t e^{-2\tau} \sin(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t e^{-2\tau} \sin \tau d\tau$.
- 3.9 a) $t^3 + \sin 3t$; б) $t^2 \operatorname{sh} 3t$; в) $\sin(t-1) \cdot h(t)$;
 г) $\int_0^t e^{-3\tau} \sin \tau d\tau$; д) $\int_0^t e^{-3(t-\tau)} \sin \tau d\tau$.
- 3.10 a) $\cos^2 t$; б) $t^2 \sin 3t$; в) $(t-3) \cdot h(t-3)$;
 г) $\int_0^t \tau e^{-2(t-\tau)} d\tau$; д) $\int_0^t \tau e^{-2\tau} d\tau$.
- 3.11 a) $\sin^2 t$; б) $t^2 \cos 3t$; в) $(t+2) \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t \cos 2\tau \cdot h(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$.

- 3.12 a) $4t^2 - \cos 2t + \operatorname{sh} 2t$; б) $e^t \cos^2 t$; в) $e^t \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t e^{-2\tau} \cos(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t e^{-2\tau} \cos \tau d\tau$.
- 3.13 a) $te^t + \operatorname{ch} t$; б) $t^2 \operatorname{ch} 3t$; в) $e^{t+2} \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t e^{-3\tau} \cos \tau d\tau$; д) $\int_0^t e^{-3\tau} \cos(t-\tau) d\tau$.
- 3.14 a) $(t+1) \sin t$; б) $\cos t \cos 3t$; в) $\sin t \cdot h(t-3)$;
 г) $\int_0^t (t-\tau) \sin 2\tau d\tau$; д) $\int_0^t \tau \sin 2\tau d\tau$.
- 3.15 a) $t \sin 5t$; б) $\sin t \cos 3t$; в) $\cos t \cdot h\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$;
 г) $\int_0^t \tau \sin 3\tau d\tau$; д) $\int_0^t (t-\tau) \sin 3\tau d\tau$.
- 3.16 a) $t \cos t$; б) $e^t \cos^2 t$; в) $\sin t \cdot h\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$;
 г) $\int_0^t (t-\tau) \cos 3\tau d\tau$; д) $\int_0^t \tau \cos 3\tau d\tau$.
- 3.17 a) $t \sin 2t$; б) $e^t \cos^2 t$; в) $\cos t \cdot h\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$;
 г) $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$; д) $\int_0^t (t-\tau) \cos 2\tau d\tau$.
- 3.18 a) $t - \sin^2 t$; б) $t^4 e^t$; в) $e^t \cdot h(t-4)$;
 г) $\int_0^t (t-\tau) \operatorname{ch} \tau d\tau$; д) $\int_0^t \tau \operatorname{ch} \tau d\tau$.
- 3.19 a) $t - \cos t$; б) $t^2 e^{-2t}$; в) $(t+1) \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t \tau \cos \tau d\tau$; д) $\int_0^t (t-\tau) \cos \tau d\tau$.
- 3.20 a) $t^3 + t \cos t$; б) $\sin^2 3t$; в) $t \cdot h(t-2)$;
 г) $\int_0^t \tau^2 e^{-(t-\tau)} d\tau$; д) $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

- 3.22 а) $e^{5t} \cos 3t$; б) $t^2 \sin 4t$; в) $e^{3t} \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t \tau e^{3\tau} d\tau$; д) $\int_0^t (t-\tau) e^{3\tau} d\tau$.
- 3.23 а) $e^{5t} \sin 3t$; б) $t \cos^2 2t$; в) $e^{-2t} \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t (t-\tau)^2 \cos \tau d\tau$; д) $\int_0^t \tau^2 \cos \tau d\tau$.
- 3.24 а) $(t+1) \sin 3t$; б) $t \sin^2 3t$; в) $e^{-5t} \cdot h(t-2)$;
 г) $\int_0^t (t-\tau)^2 \sin \tau d\tau$; д) $\int_0^t \tau^2 \sin \tau d\tau$.
- 3.25 а) $(t+2) \operatorname{sh} 3t$; б) $t^2 \operatorname{ch} t$; в) $t \cdot h(t+2)$;
 г) $\int_0^t \tau^2 \sin 3(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t \tau^2 \sin 3\tau d\tau$.
- 3.26 а) $(t+2) \operatorname{ch} 3t$; б) $t^3 e^{-4t}$; в) $e^{3t} \cdot h(t-1)$;
 г) $\int_0^t \tau \cos 2(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t \tau \cos 2\tau d\tau$.
- 3.27 а) $\cos^2 2t$; б) $t^3 \cos^2 2t$; в) $e^{t+1} \cdot h(t-2)$;
 г) $\int_0^t \tau \operatorname{ch}(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t \tau \operatorname{ch} \tau d\tau$.
- 3.28 а) $\sin^3 2t$; б) $t \sin^2 2t$; в) $(t+1) \cdot h(t-2)$;
 г) $\int_0^t \tau \sin(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t \tau \operatorname{sh} \tau d\tau$.
- 3.29 а) $t \cos t + t^4$; б) $t^3 e^{-5t}$; в) $t \cdot h(t-5)$;
 г) $\int_0^t e^{t-\tau} \sin 3\tau d\tau$; д) $\int_0^t e^\tau \sin 3\tau d\tau$.
- 3.30 а) $e^{3t} \cos t$; б) $t^3 e^{4t}$; в) $t \cdot h(t-7)$;
 г) $\int_0^t e^{-\tau} \sin 3(t-\tau) d\tau$; д) $\int_0^t e^{-\tau} \sin 3\tau d\tau$.

4. Найти оригиналы по заданным изображениям:

$$4.1 \quad \text{а) } \frac{p+5}{(p-1)(p^2+2p+2)}; \quad \text{б) } \frac{e^{-p}}{p(p^2+4)}.$$

- | | | | | |
|------|----|-------------------------------------|----|---|
| 4.2 | a) | $\frac{1}{(p+2)(p^2+4p+5)}$; | б) | $\frac{e^{-2p}}{p^2+9}$. |
| 4.3 | a) | $\frac{p+10}{p(p^2-4p+5)}$; | б) | $\frac{e^{-2p}}{p-1}$. |
| 4.4 | a) | $\frac{1}{p(p^2+3)}$; | б) | $\frac{e^{-3p}}{p^2-4}$. |
| 4.5 | a) | $\frac{2p-1}{p(p^2-2p+2)}$; | б) | $\frac{3e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-3p}}{p^3}$. |
| 4.6 | a) | $\frac{15p+11}{(p-2)(p^2+6p+25)}$; | б) | $\frac{e^{-p}}{p(p+1)}$. |
| 4.7 | a) | $\frac{18}{(p+1)(p^2+8p+25)}$; | б) | $\frac{e^{-p}}{p^2(p+1)}$. |
| 4.8 | a) | $\frac{5}{(p+2)(p^2+2p+5)}$; | б) | $\frac{e^{-3p}}{p^2+5}$. |
| 4.9 | a) | $\frac{3p+5}{p^2(p^2-2p+5)}$; | б) | $\frac{e^{-p}}{p^2+1}$. |
| 4.10 | a) | $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+2)}$; | б) | $\frac{pe^{-3p}}{p^2+4}$. |
| 4.11 | a) | $\frac{8p+16}{(p^2+1)(p^2+9)}$; | б) | $\frac{e^{-2p}}{(p-1)^2}$. |
| 4.12 | a) | $\frac{2}{p(p^2-2p+2)}$; | б) | $\frac{pe^{-2p}}{p^2-9}$. |
| 4.13 | a) | $\frac{p^2+1}{p(p^2+p+1)}$; | б) | $\frac{e^{-2p}}{p^2+16}$. |
| 4.14 | a) | $\frac{10}{(p-3)(p^2-4p+13)}$; | б) | $\frac{e^{-2p}}{p^6}$. |
| 4.15 | a) | $\frac{1}{p^2(p+3)}$; | б) | $\frac{e^{-4p}}{p(p+1)}$. |
| 4.16 | a) | $\frac{2p+3}{p(p^2+4p+5)}$; | б) | $\frac{e^{-p}}{p(p+1)}$. |
| 4.17 | a) | $\frac{8}{p(p^2+4p+8)}$; | б) | $\frac{e^{-2p}}{p(p+2)}$. |
| 4.18 | a) | $\frac{3}{p(p^2+2p+3)}$; | б) | $\frac{e^{-p}}{p(p+3)}$. |
| 4.19 | a) | $\frac{8p}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; | б) | $\frac{1}{p^2} - \frac{3e^{-2p}}{p^2}$. |
| 4.20 | a) | $\frac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$; | б) | $\frac{e^{-p/2}}{p+3}$. |
| 4.21 | a) | $\frac{2-3p}{(p-2)(p^2+2p+3)}$; | б) | $\frac{e^{-p}}{p^2+4p+3}$. |

4.23 а) $\frac{p+3}{(p+1)(p^2+2p+3)}$;	б) $\frac{e^{-2p}}{p+3}$.
4.24 а) $\frac{10}{(p+2)(p^2+2p+10)}$;	б) $\frac{e^{-p/2}}{p+1}$.
4.25 а) $\frac{1}{(p+1)(p^2+2)}$;	б) $\frac{e^{-p}}{p(p+3)}$.
4.26 а) $\frac{6}{p^3-8}$;	б) $\frac{e^{-2p}}{p^2+2p+10}$.
4.27 а) $\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$;	б) $\frac{e^{-p}}{p^2+8p+25}$.
4.28 а) $\frac{4p+10}{p(p^2+4p+5)}$;	б) $\frac{e^{-2p}}{p^2-2p+5}$.
4.29 а) $\frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$;	б) $\frac{e^{-2p}}{p^2+4p+8}$.
4.30 а) $\frac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$;	б) $\frac{e^{-2p}}{p^2+2p}$.

5. Операционным методом решить дифференциальные уравнения, удовлетворяющие заданным условиям:

5.1 а) $x'' + x' = 1 - t$, $x(0) = x'(0) = 0$;	б) $x'' + x = 2e^{-t}$, $x(0) = 1, x'(0) = 0$.
5.2 а) $x'' - 4x' + 3x = 0$, $x(0) = 6, x'(0) = 10$;	б) $x'' - x = \sin t$, $x(0) = -1, x'(0) = 0$.
5.3 а) $x'' + 4x' + 29x = 0$, $x(0) = 0, x'(0) = 15$;	б) $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
5.4 а) $x''' - x'' = t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;	б) $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2, x'(0) = 0$.
5.5 а) $x'' - 4x' + 5x = 0$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$;	б) $x'' + 3x' = e^t$, $x(0) = 1, x'(0) = -2$.
5.6 а) $x''' + 4x'' = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 1, x''(0) = 0$;	б) $x'' - 4x = t - 1$, $x(0) = x'(0) = 0$.
5.7 а) $x'' - 4x = e^{-2t}$, $x(0) = x'(0) = 0$;	б) $x'' + 2x' = \cos t$, $x(0) = 2, x'(0) = 1$.

- 5.8 a) $x'' - 2x' = t - 1$,
 $x(0) = 6, x'(0) = 10$;
- 5.9 a) $x''' - x'' = e^t$,
 $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$;
- 5.10 a) $x'' + 2x' + x = 0$,
 $x(0) = 1, x'(0) = -1$;
- 5.11 a) $x'' + 9x = 0$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 0$;
- 5.12 a) $x''' + x'' = e^t$,
 $x(0) = -3, x'(0) = 1, x''(0) = 0$;
- 5.13 a) $x'' + x' = t - 2$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.14 a) $x'' + x = e^t$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.15 a) $x'' + 2x' + 2x = 1$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.16 a) $x'' + x = 0$,
 $x(0) = -1, x'(0) = 2$;
- 5.17 a) $x'' - x = t^3$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.18 a) $x'' + 2x' = \sin t$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.19 a) $x'' + 2x' + 2x = 1$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.20 a) $x'' - 3x' + 2x = 0$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 0$;
- б) $x'' + 2x' = 2 + e^t$,
 $x(0) = -1, x'(0) = 0$.
- б) $x'' + 3x' + 2x = 1 + t$,
 $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
- б) $x'' + 2x' + x = \cos t$,
 $x(0) = x'(0) = 0$.
- б) $x'' - 2x' = e^{2t}$,
 $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
- б) $x'' - x = t^2$,
 $x(0) = x'(0) = 0$.
- б) $x'' + 2x' + 5x = 3$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 0$.
- б) $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 0$.
- б) $x'' - 3x' + 2x = e^{2t}$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 2$.
- б) $x'' + x' - 2x = e^{-t}$,
 $x(0) = -1, x'(0) = 0$.
- б) $x'' + 3x' + 2x = 2e^{3t}$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 3$.
- б) $x'' + x' = t^2 + 2t$,
 $x(0) = 4, x'(0) = -2$.
- б) $x'' - x' = 5 \cos 2t$,
 $x(0) = -1, x'(0) = -2$.
- б) $x'' + x' = 2 \cos t$,
 $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

- 5.22 a) $x'' - 3x' - 10x = 0$,
 $x(0) = 3, x'(0) = -1$;
- 5.23 a) $x'' + 2x' + 10x = 2e^{-t}$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.24 a) $x'' + 4x' + 4x = 0$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 2$;
- 5.25 a) $x'' - x' - 6x = 0$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 0$;
- 5.26 a) $2x'' + 5x' = \cos t$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.27 a) $x'' + 9x = 0$,
 $x(0) = 0, x'(0) = 1$;
- 5.28 a) $x'' + 9x' = \sin t$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.29 a) $x'' - x' = t^2$,
 $x(0) = x'(0) = 0$;
- 5.30 a) $x'' + 4x = 3 \sin t + 10 \cos t$,
 $x(0) = -2, x'(0) = 1$;
- б) $x'' - 2x' + 2x = \sin t$,
 $x(0) = x'(0) = 0$.
- б) $x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t}$,
 $x(0) = 2, x'(0) = 1$.
- б) $x'' + x' = 8 \sin 2t$,
 $x(0) = 3, x'(0) = -1$.
- б) $x'' + x' + x = t^2 + t$,
 $x(0) = 1, x'(0) = -3$.
- б) $x'' - 2x' - 3x = 2t$,
 $x(0) = x'(0) = 1$.
- б) $x'' + x = \operatorname{sh} t$,
 $x(0) = 2, x'(0) = 1$.
- б) $x'' + 2x' = 2 + e^t$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 2$.
- б) $x'' + x' + x = 5e^{2t}$,
 $x(0) = 1, x'(0) = 2$.
- б) $x'' + x' = (t+1)e^t$,
 $x(0) = x'(0) = 0$.

6. Решить систему дифференциальных уравнений:

- 6.1
$$\begin{cases} x' = x + 4y + 1, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 3y + 2, & y(0) = 2. \end{cases}$$
- 6.3
$$\begin{cases} x' = 5x - 4y, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 11y + 2, & y(0) = 1. \end{cases}$$
- 6.5
$$\begin{cases} x' = 3x + y + 5, & x(0) = 0, \\ y' = x + 3y - 1, & y(0) = 1. \end{cases}$$
- 6.2
$$\begin{cases} x' = 5x + 4y + 1, & x(0) = 1, \\ y' = -2x + 11y, & y(0) = 2. \end{cases}$$
- 6.4
$$\begin{cases} x' = x + 4y, & x(0) = 1, \\ y' = x + y + 5, & y(0) = 0. \end{cases}$$
- 6.6
$$\begin{cases} x' = x - 3y + 2, & x(0) = 0, \\ y' = 3x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.9 \quad \begin{cases} x' = x + 6y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = -2x + 9y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.11 \quad \begin{cases} x' = 2x - 3y, & x(0) = 0, \\ y' = -2x + y + 1, & y(0) = 5. \end{cases}$$

$$6.13 \quad \begin{cases} x' = x - 3y + 1, & x(0) = 1, \\ y' = x + 5y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.15 \quad \begin{cases} x' = 3y + 2, & x(0) = -1, \\ y' = x + 2y, & y(0) = 2. \end{cases}$$

$$6.17 \quad \begin{cases} x' = 5x + 4y + 1, & x(0) = 2, \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.19 \quad \begin{cases} x' = 2x + 8y, & x(0) = 1, \\ y' = x + 4y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.21 \quad \begin{cases} x' = x + 5y + 2, & x(0) = 0, \\ y' = 7x + 3y, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$6.23 \quad \begin{cases} x' = 3x + y, & x(0) = 2, \\ y' = 8x + y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.25 \quad \begin{cases} x' = x + 3y, & x(0) = 1, \\ y' = -x + 5y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.27 \quad \begin{cases} x' = -7x + y + 1, & x(0) = 2, \\ y' = -2x - 5y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.29 \quad \begin{cases} x' = 3x + 4y, & x(0) = 2, \\ y' = -x - 2y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.10 \quad \begin{cases} x' = x + 3y + 3, & x(0) = 2, \\ y' = x - y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.12 \quad \begin{cases} x' = x - 2y, & x(0) = 3, \\ y' = x + 4y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.14 \quad \begin{cases} x' = x + 4y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.16 \quad \begin{cases} x' = 7x - 5y, & x(0) = -1, \\ y' = -4x + 8y + 3, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.18 \quad \begin{cases} x' = 4x + 6y + 2, & x(0) = 0, \\ y' = 4x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.20 \quad \begin{cases} x' = -2x + y + 2, & x(0) = 0, \\ y' = 3x, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.22 \quad \begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.24 \quad \begin{cases} x' = 2x + 6y, & x(0) = 1, \\ y' = 2x - 2y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.26 \quad \begin{cases} x' = 4x + 5y, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$6.28 \quad \begin{cases} x' = x - 3y + 2, & x(0) = 0, \\ y' = -2x + 6y + 1, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$6.30 \quad \begin{cases} x' = -2x - 2y, & x(0) = 1, \\ y' = -3x - y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

3. Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

3.1. Основные определения

Определение 3.1. Решетчатой функцией-оригиналом будем называть функцию дискретного аргумента $f(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, если она удовлетворяет условиям:

- 1) $f(n) = 0$, при всех $n < 0$;
- 2) $|f(n)| < M e^{s_0 n}$, где M и s_0 положительные числа, s_0 – показатель роста $f(n)$.

Любая элементарная функция натурального аргумента n , удовлетворяющая условию 2, становится решетчатой функцией-оригиналом после умножения ее на единичную функцию $h(n)$:

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Например, $f(n) = (n^3 + e^n)h(n)$.

Определение 3.2. Функция непрерывного аргумента $f(t)$ называется огибающей для решетчатой функции $f(n)$, если их значения совпадают при $t = n$ ($f(t)|_{t=n} = f(n)$).

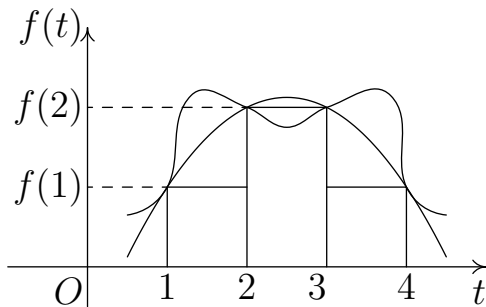


Рис. 3.1

Решетчатой функции $f(n)$ могут соответствовать различные огибающие $f(t)$. Простейшей огибающей для $f(n)$ является ступенчатая функция, полученная проведением через точки $(n; f(n))$ отрезков единичной длины параллельных оси абсцисс (рис. 3.1).

3.2. Z-преобразование

Рассмотрим ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки, коэффициентами которого являются значения $f(n)$:

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}. \quad (3.1)$$

Определение 3.3. Функция комплексного переменного $F(z)$, определенная рядом (3.1), называется изображением решетчатой функции $f(n)$.

Переход от оригинала $f(n)$ к изображению $F(z)$ называют Z -преобразованием и обозначают $F(z) = Z[f(n)]$.

Если $f(n)$ – оригинал, то ряд (3.1) сходится при $|z| > e^{s_0}$, так как в этом случае

$$\left| \frac{f(n)}{z^n} \right| \leq M \left| \frac{e^{s_0}}{z} \right|^n. \quad (3.2)$$

Неравенство (3.2) означает, что ряд (3.1) мажорируется убывающей геометрической прогрессией и по признаку Вейерштрасса сходится равномерно. Следовательно, функция $F(z)$ является аналитической, если $|z| > e^{s_0}$.

Пример 3.1. Найти изображение функции $f(n) = a^n$, где a некоторая константа.

Решение. Если $|z| > |a|$, то члены ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$ образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{a}{z}$ и его сумма

$$F(z) = Z[a^n] = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}. \quad (3.3)$$

В частности, для $f(n) = e^{an}$ из соответствия (3.3) получим $F(z) = \frac{z}{z - e^a}$.

3.3. Свойство линейности

Теорема 3.1. Для любых комплексных чисел A, B и решетчатых функций-оригиналов $f_1(n), f_2(n)$ справедливо равенство

$$Z[Af_1(n) + Bf_2(n)] = AZ[f_1(n)] + BZ[f_2(n)]. \quad (3.4)$$

Это свойство следует из определения Z -преобразования и свойств сходящихся рядов.

Пример 3.2. Найти изображение функции $f(n) = \cos \omega n$.

Решение. Известно, что $\cos \omega n = \frac{1}{2}(e^{i\omega n} + e^{-i\omega n})$, тогда по свойству линейности $Z[\cos \omega n] = \frac{1}{2}(Z[e^{i\omega n}] + Z[e^{-i\omega n}])$. Принимая в соответствии (3.3) a равным $e^{\pm i\omega}$, запишем

$$\begin{aligned}
Z[\cos \omega n] &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{i\omega}} + \frac{z}{z - e^{-i\omega}} \right) = \\
&= \frac{z}{2} \cdot \frac{2z - (e^{i\omega} + e^{-i\omega})}{z^2 - z(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1} = \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

3.4. Теорема затухания

Теорема 3.2. Если $a \neq 0$ – любое комплексное число и $f(n)$ – функция-оригинал, $Z[f(n)] = F(z)$, то

$$Z[a^{-n} f(n)] = F(az). \quad (3.6)$$

Доказательство. По определению 3.1

$$Z[a^{-n} f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{(az)^n} = F(az).$$

Пример 3.3. Найти изображение функции $f(n) = 2^{-n} \cos \omega n$.

Решение. Применим теорему затухания к соответствию (3.5), получим

$$Z[2^{-n} \cos \omega n] = \frac{2z(2z - \cos \omega)}{4z^2 - 4z \cos \omega + 1}.$$

3.5. Теорема запаздывания

Теорема 3.3. Если $Z[f(n)] = F(z)$, то для любого натурального m

$$Z[f(n - m)] = z^{-m} F(z). \quad (3.7)$$

Доказательство. Действительно, по определению

$$Z[f(n - m)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n - m) z^{-n} = \sum_{n=m}^{\infty} f(n - m) z^{-n},$$

так как оригинал $f(n - m) = 0$, если $n < m$. Обозначим $k = n - m$, тогда $n = k + m$. Отсюда

$$Z[f(n - m)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-(k+m)} = z^{-m} F(z).$$

Пример 3.4. Найти изображение функции $f(n) = \cos \omega(n - 3)$.

Решение. К найденному в примере 3.2 изображению функции $f(n) = \cos \omega n$ применим теорему запаздывания:

$$Z[\cos \omega(n-3)] = z^{-3} \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} = \frac{z - \cos \omega}{z^2(z^2 - 2z \cos \omega + 1)}.$$

3.6. Теорема опережения

Теорема 3.4. Если $Z[f(n)] = F(z)$ и m – натуральное число, то

$$Z[f(n+m)] = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right]. \quad (3.8)$$

Доказательство. По определению Z -преобразования

$$Z[f(n+m)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+m)z^{-n}. \quad (3.9)$$

Обозначим $k = n+m$, $n = k-m$, тогда ряд в соответствии (3.9) представим в виде

$$Z[f(n+m)] = \sum_{k=m}^{\infty} f(k)z^{-(k-m)} = z^m \sum_{k=m}^{\infty} f(k)z^{-k}.$$

Этот ряд дополним до ряда Лорана (3.1):

$$z^m \sum_{k=m}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^m \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right],$$

но $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = F(z)$ по формуле (3.1), так как обозначение индекса суммирования не влияет на значение суммы ряда.

Пример 3.5. Найти изображение функции $f(n) = \cos \omega(n+1)$.

Решение. По формуле (3.8)

$$Z[\cos \omega(n+1)] = z[Z[\cos \omega n] - \cos 0].$$

Принимая во внимание равенство (3.5), находим

$$Z[\cos \omega(n+1)] = z \left[\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1} - 1 \right] = \frac{z(z \cos \omega - 1)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.$$

3.7. Теорема дифференцирования изображения

Теорема 3.5. Если $Z[f(n)] = F(z)$, то

$$Z[nf(n)] = -z \frac{dF(z)}{dz}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Для функции-оригинала при $|z| > e^{s_0}$ ряд (3.1) сходится абсолютно и равномерно и $F(z)$ является аналитической функцией, поэтому $F(z)$ имеет производные любого порядка. Дифференцируя ряд (3.1), получим

$$\frac{dF(z)}{dz} = - \sum_{n=1}^{\infty} n f(n) z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n f(n) z^{-n} = -z^{-1} Z[nf(n)].$$

Отсюда следует равенство (3.10).

Дифференцируя ряд (3.1) повторно, запишем

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) f(n) z^{-n-2} = z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) f(n) z^{-n} = z^{-2} Z[n(n+1)f(n)].$$

Отсюда

$$Z[n(n+1)f(n)] = z^2 \frac{d^2 F(z)}{dz^2}. \quad (3.11)$$

Дифференцируя $F(z)$ k раз, получим

$$Z[n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)f(n)] = (-z)^k \frac{d^k F(z)}{dz^k}. \quad (3.12)$$

Функцию $n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$ называют факториальной функцией и обозначают $n^{(k)} = n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$.

Пример 3.6. Найти изображение факториальной функции $f(n) = n^{(k)} = n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)$.

Решение. В формулу (3.12) в качестве $f(n)$ подставим единичную функцию $h(n)$, изображение которой получается из равенства (3.3) при $a=1$:

$$F(z) = Z[h(n)] = \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}. \quad (3.13)$$

Последовательно дифференцируя обе части выражения (3.13), запишем

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= -\frac{1}{(z-1)^2}, \\ \frac{d^2 F(z)}{dz^2} &= \frac{2}{(z-1)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3 F(z)}{dz^3} &= -\frac{6}{(z-1)^4}, \\ \frac{d^k F(z)}{dz^k} &= \frac{(-1)^k k!}{(z-1)^{k+1}}.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Подставив равенство (3.14) в (3.12), получим соответствие

$$Z[n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)] = \frac{z^k k!}{(z-1)^{k+1}}. \quad (3.15)$$

Перепишем это соотношение в виде

$$z^{-(k-1)} Z[n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)] = \frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}. \quad (3.16)$$

Воспользовавшись теоремой 3.4 (опережения) для $m = k-1$, преобразуем левую часть соответствия (3.16):

$$Z[(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\dots(n-k+1+k-1)] = \frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}.$$

Располагая множители в обратном порядке, получим соответствие

$$Z[n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)] = \frac{k!z}{(z-1)^{k+1}}. \quad (3.17)$$

Заметим, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (3.18)$$

С использованием свойства линейности, получаем

$$Z[C_n^k] = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}. \quad (3.19)$$

Пример 3.7. Найти изображения решетчатых функций n , n^2 , n^3 .

Решение. Применим последовательно теорему дифференцирования изображения к соответствию (3.13):

$$Z[n] = Z[nh(n)] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad (3.20)$$

$$Z[n^2] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, \quad (3.21)$$

$$Z[n^3] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right) = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}. \quad (3.22)$$

3.8. Теорема интегрирования изображения

Теорема 3.6. Если $f(n)$ решетчатая функция-оригинал и $f(0) = f(1) = 0$, то

$$Z \left[\frac{f(n+1)}{n} \right] = \int_z^\infty F(z) dz, \quad (3.23)$$

где интегрирование ведется по любой линии, соединяющей точку z с бесконечно удаленной точкой.

Доказательство. Ряд (3.1) сходится равномерно, поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\int_z^\infty F(z) dz = \sum_{n=2}^\infty f(n) \int_z^\infty z^{-n} dz = \sum_{n=2}^\infty \frac{f(n)}{n-1} z^{-(n-1)}.$$

Обозначим $k = n - 1$, $n = k + 1$, тогда

$$\int_z^\infty F(z) dz = \sum_{k=1}^\infty \frac{f(k+1)}{k} z^{-k} = \sum_{n=1}^\infty \frac{f(n+1)}{n} z^{-n} = Z \left[\frac{f(n+1)}{n} \right],$$

так как $f(k+1) = 0$ при $k = 0$.

При доказательстве теоремы было использовано равенство $\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^\infty \frac{f(n)}{n-1} z^{-(n-1)} = 0$. Обоснуем его. Ряд (3.1) сходится если $|z| > e^s$, а так как $f(n)$ – оригинал, то

$$\sum_{n=2}^\infty \left| \frac{f(n)}{n-1} \right| |z|^{1-n} \leq M |z| \sum_{n=2}^\infty \left| \frac{e^s}{z} \right|^n \cdot \frac{1}{n-1} \leq M |z| \sum_{n=2}^\infty \left| \frac{e^s}{z} \right|^n.$$

Члены последнего ряда образуют убывающую геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\left| \frac{e^s}{z} \right|^2 \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{e^s}{z} \right|} = \frac{e^{2s}}{|z|(|z| - e^s)}$. Поэтому

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^\infty \frac{f(n)}{n-1} z^{-(n-1)} \leq M \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^{2s}}{(|z| - e^s)} = 0.$$

3.9. Теорема дифференцирования изображения по параметру

Теорема 3.7. Если оригинал $f(n, x)$ зависит от параметра x и $Z[f(n, x)] = F(z, x)$, то

$$Z \left[\frac{\partial}{\partial x} f(n, x) \right] = \frac{\partial}{\partial x} F(z, x). \quad (3.24)$$

Пример 3.8. Найти изображение функции $f(n) = ne^{nx}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(n, x) = e^{xn}$. Так как $\frac{\partial f}{\partial x} = ne^{nx}$, то

$$Z[ne^{nx}] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{z - e^x} \right) = \frac{ze^x}{(z - e^x)^2}.$$

3.10. Предельные соотношения для Z -преобразования

Найдем предел $F(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Из разложения (3.1) имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left[f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots \right] = f(0). \quad (3.25)$$

Перепишем ряд (3.1) в виде

$$F(z) - f(0) = \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots$$

Умножим обе части последнего равенства на z :

$$z(F(z) - f(0)) = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \dots + \frac{f(n)}{z^{n-1}} + \dots$$

Переходя к пределу при $z \rightarrow \infty$, получаем

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z) - f(0)). \quad (3.26)$$

Аналогично находим

$$f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left(F(z) - f(0) - \frac{f(1)}{z} \right), \quad (3.27)$$

$$f(3) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left(F(z) - f(0) - \frac{f(1)}{z} - \frac{f(2)}{z^2} \right). \quad (3.28)$$

Продолжая этот процесс, получаем значения $f(n)$ для любого натурального аргумента:

$$f(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^n \left(F(z) - f(0) - \frac{f(1)}{z} - \frac{f(2)}{z^2} - \dots - \frac{f(n-1)}{z^{n-1}} \right). \quad (3.29)$$

3.11. Обратное Z -преобразование

Определение 3.4. Обратным Z -преобразованием называется переход от изображения $F(z)$ к решетчатой функции $f(n)$.

Обратное Z -преобразование будем обозначать символом Z^{-1} :

$$f(n) = Z^{-1}[F(z)]. \quad (3.30)$$

Коэффициенты ряда Лорана (3.1), задающего Z -преобразование $F(z)$, равны значениям функции $f(n)$ и их вычисляют по формуле

$$f(n) = Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz, \quad (3.31)$$

где C – любая замкнутая кривая, окружающая все особые точки $F(z)$. В частности, контур C – это окружность с центром в начале координат и с достаточно большим радиусом. Равенство (3.31) выражает теорему обращения для Z -преобразования.

Из формулы (3.31) следует, что обратное Z -преобразование обладает свойством линейности, так как таковое присуще контурному интегралу, выражающему $Z^{-1}[F(z)]$. Это означает, что для любых чисел A_1 , A_2 и любых изображений $F_1(z)$, $F_2(z)$ справедливо выражение

$$Z^{-1}[A_1 F_1(z) + A_2 F_2(z)] = A_1 Z^{-1}[F_1(z)] + A_2 Z^{-1}[F_2(z)].$$

По основной теореме теории вычетов [16] выражение в правой части формулы (3.31) равно сумме вычетов функции $F(z)z^{n-1}$ относительно полюсов z_k , $k = 1, 2, \dots, m$, лежащих внутри контура C :

$$f(n) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}[F(z)z^{n-1}, z = z_k]. \quad (3.32)$$

Если z_k – простой полюс, то вычет находят по формуле

$$\operatorname{Res}[F(z)z^{n-1}, z = z_k] = \lim_{z \rightarrow z_k} z^{n-1} F(z)(z - z_k). \quad (3.33)$$

Для полюса z_k кратности m вычит

$$\operatorname{Res}[F(z)z^{n-1}, z = z_k] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [z^{n-1}F(z)(z - z_k)^m]. \quad (3.34)$$

Обратное Z -преобразование можно осуществить следующими способами:

1. По формуле обращения (3.31), используя теорию вычетов.
2. С помощью предельных соотношений (3.25)–(3.29).
3. Делением числителя на знаменатель для рационального изображения $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, где степень многочлена $A(z)$ не превосходит степень многочлена $B(z)$.

4. Разложением $F(z)$ в ряд по степеням $\frac{1}{z}$, используя известные разложения.

5. По таблицам и свойствам Z -преобразования.

Пример 3.9. Восстановить оригинал по изображению $F(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$.

Решение. Используем для нахождения оригинала указанные выше 5 способов.

1. В этом случае подынтегральная функция $\Phi(z, n)$ в формуле (3.31)

$$\Phi(z, n) = F(z)z^{n-1} = \frac{(z+1)z^n}{z(z^2+1)}. \quad (3.35)$$

При $n=0$ $\Phi(z, n)$ имеет три простых полюса в точках $z=0$, $z=\pm i$. Найдем вычеты $\Phi(z, 0)$ относительно указанных полюсов по формуле (3.33):

$$\operatorname{Res}[\Phi(z, 0), z=0] = \lim_{z \rightarrow 0} \Phi(z, 0) \cdot z = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z+1)z}{z(z^2+1)} = 1;$$

$$\operatorname{Res}[\Phi(z, 0), z=i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z+1)(z-i)}{z(z+i)(z-i)} = \frac{1+i}{i \cdot 2i} = -\frac{1}{2}(1+i);$$

$$\operatorname{Res}[\Phi(z, 0), z=-i] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z+1)(z+i)}{z(z+i)(z-i)} = \frac{1-i}{-i \cdot (-2i)} = -\frac{1}{2}(1-i).$$

Значения этих вычетов подставим в формулу (3.32) и найдем величину:

$$f(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = 0.$$

При $n \geq 1$ функция $\Phi(z, n)$ имеет два простых полюса в точках $z = \pm i$, вычеты относительно этих полюсов

$$\operatorname{Res}[\Phi(z, n), z=i] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^n(z+1)(z-i)}{z(z+i)(z-i)} = \frac{(1+i)i^n}{i \cdot 2i} = -\frac{1}{2}(i^n + i^{n+1});$$

$$\operatorname{Res}[\Phi(z, n), z=-i] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^n(z+1)(z+i)}{z(z+i)(z-i)} = \frac{(1-i)(-i)^n}{-i \cdot (-2i)} = -\frac{1}{2}((-i)^n + (-i)^{n+1}).$$

Подставив полученные выражения для вычетов в формулу (3.32), получим $f(n)$ при $n \geq 1$:

$$f(n) = -\frac{1}{2}[i^n + i^{n+1} + (-i)^n + (-i)^{n+1}]. \quad (3.36)$$

Поскольку $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, $-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}$, то $f(n)$ в формуле (3.36) представим в виде

$$f(n) = -\frac{1}{2}(e^{\frac{i\pi n}{2}} + e^{-\frac{i\pi n}{2}} + e^{\frac{i\pi(n+1)}{2}} + e^{-\frac{i\pi(n+1)}{2}}).$$

Так как $\frac{1}{2}(e^{\frac{i\pi n}{2}} + e^{-\frac{i\pi n}{2}}) = \cos \frac{\pi n}{2}$, то

$$f(n) = -\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \frac{\pi(n+1)}{2} = -\cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2}.$$

При $n = 2k - 1$, $\cos \frac{\pi(2k-1)}{2} = 0$, поэтому

$$f(2k-1) = \sin \frac{\pi(2k-1)}{2} = (-1)^{k+1}.$$

При $n = 2k$, $\sin \frac{\pi 2k}{2} = 0$, следовательно,

$$f(2k) = -\cos \pi k = (-1)^{k+1}.$$

Суммируя все вышесказанное, получим

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ (-1)^{k+1}, & n=2k-1, \\ (-1)^{k+1}, & n=2k. \end{cases}$$

2. Далее найдем значения $f(n)$ с помощью предельных соотношений (3.25)–(3.29).

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+1}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^2}} = 0,$$

$$f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} zF(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)}{z^2+1} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+z}{z^2+1} = 1,$$

$$f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left[\frac{z+1}{z^2+1} - \frac{1}{z} \right] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2(z^2+z-z^2-1)}{z(z^2+1)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3+z-1}{z^3+z} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 f(3) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left[\frac{z+1}{z^2+1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3(z^3 + z^2 - z^3 - z - z^2 - 1)}{z^2(z^2 + 1)} = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^4 + z^3}{z^4 + z^2} = -1.
 \end{aligned}$$

Используя формулу (3.29), найдем $f(4)$, $f(5)$, т. е. сколь угодно значений $f(n)$.

3. Теперь вычислим значения $f(n)$ делением $z+1$ на z^2+1 :

$$\begin{array}{r|l}
 z+1 & z^2+1 \\
 \hline
 z + \frac{1}{z} & \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots \\
 \hline
 1 - \frac{1}{z} & \\
 \hline
 1 + \frac{1}{z^2} & \\
 \hline
 -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} & \\
 \hline
 -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} & \\
 \hline
 -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} & \\
 \hline
 -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} & \\
 \hline
 \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} &
 \end{array}$$

Отсюда имеем следующие значения $f(n)$: $f(0)=0$, $f(1)=f(2)=1$, $f(3)=f(4)=-1$, $f(5)=f(6)=1$, т. е. $f(2k-1)=(-1)^{k+1}$, $f(2k)=(-1)^{k+1}$.

4. Найдем $f(n)$, разлагая $\frac{z+1}{z^2+1}$ по степеням $\frac{1}{z}$. Для этого числитель и знаменатель дроби разделим на z^2 и представим ее в виде суммы двух слагаемых:

$$F(z) = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}}{1 + \frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}}.$$

Так как $\left| \frac{1}{z^2} \right| < 1$, то дробь $\frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}}$ равна сумме ряда, члены которого образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = -\frac{1}{z^2}$:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{z^{2(k-1)}},$$

ПОЭТОМУ

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{z^{2(k-1)}} + \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{z^{2(k-1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{z^{2k}}.$$

Отсюда следует, что $f(0) = 0$, $f(2k - 1) = (-1)^{k+1}$, $f(2k) = (-1)^{k+1}$. $k \geq 1$.

5. Найдем $f(n)$ с помощью таблиц и свойств Z -преобразования. Для этого $F(z)$ разложим на простые дроби:

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2+1} = \frac{z+1}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i}.$$

Числа A и B равны вычетам $F(z)$ относительно простых полюсов $z = \pm i$:

$$A = \text{Res}[F(z), z=i] = \lim_{z \rightarrow i} F(z)(z-i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+1}{z+i} = \frac{1}{2}(1-i),$$

$$B = \text{Res}[F(z), z=-i] = \lim_{z \rightarrow -i} F(z)(z+i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z+1}{z-i} = \frac{1}{2}(1+i).$$

Из табл. Б.4 прил. Б и теоремы 3.3 (запаздывания) при $m=1$ находим

$$Z^{-1} \left[\frac{1}{z-i} \right] = Z^{-1} \left[z^{-1} \cdot \frac{z}{z-i} \right] = i^{n-1},$$

$$Z^{-1} \left[\frac{1}{z+i} \right] = Z^{-1} \left[z^{-1} \cdot \frac{z}{z+i} \right] = (-i)^{n-1}.$$

Отсюда по свойству линейности для обратного Z -преобразования

$$f(n) = AZ^{-1} \left[\frac{1}{z-i} \right] + BZ^{-1} \left[\frac{1}{z+i} \right] = \frac{1}{2} [(1-i)i^{n-1} + (1+i)(-i)^{n-1}].$$

Поскольку $f(n)$ – оригинал, то из этого равенства следует, что $f(0) = 0$. После несложных преобразований запишем

$$f(n) = -\frac{1}{2}(i^n + (-i)^n) + \frac{1}{2}(i^{n-1} + (-i)^{n-1}).$$

Так как $(\pm i)^n = e^{\pm i\pi n/2}$, то

$$f(n) = -\frac{1}{2}(e^{i\pi n/2} + e^{-i\pi n/2}) + \frac{1}{2}(e^{i\pi(n-1)/2} + e^{-i\pi(n-1)/2}) =$$

$$= -\cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{\pi(n-1)}{2} = -\cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Отсюда

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n=0 \\ (-1)^{k+1}, & n=2k-1, k \geq 1 \\ (-1)^{k+1}, & n=2k, k \geq 1. \end{cases}$$

3.12. Z -преобразование свертки решетчатых функций

Определение 3.5. Сверткой решетчатых функций $f_1(n)$ и $f_2(n)$ называется выражение

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{k=0}^n f_1(n-k)f_2(k). \quad (3.37)$$

Нетрудно проверить, что свертка является коммутативной операцией, т. е. $f_1(n) * f_2(n) = f_2(n) * f_1(n)$. Верхний предел суммирования в формуле (3.37) можно принять равным бесконечности, так как при $k > n$ функция-оригинал равна нулю:

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(n-k)f_2(k). \quad (3.38)$$

Теорема 3.8. Если $Z[f_1(n)] = F_1(z)$, $Z[f_2(n)] = F_2(z)$, то

$$Z[f_1(n) * f_2(n)] = F_1(z)F_2(z). \quad (3.39)$$

Доказательство. Применим Z -преобразование к обеим частям формулы (3.38), получим

$$Z[f_1(n) * f_2(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_1(n-k)f_2(k) \right) z^{-n}. \quad (3.40)$$

Изменим порядок суммирования в формуле (3.40) и учтем теорему 3.3 (запаздывания):

$$Z[f_1(n) * f_2(n)] = \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k) \sum_{n=0}^{\infty} f_1(n-k)z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k)F_1(z)z^{-k}. \quad (3.41)$$

Функция $F_1(z)$ не зависит от k , поэтому

$$Z[f_1(n) * f_2(n)] = F_1(z) \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k)z^{-k} = F_1(z)F_2(z). \quad (3.42)$$

3.13. Z -преобразование разности решетчатой функции

Определение 3.6. Конечной разностью первого порядка решетчатой функции $f(n)$ называется выражение

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n). \quad (3.43)$$

По аналогии разности второго и третьего порядков определяются как

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n), \quad (3.44)$$

$$\Delta^3 f(n) = \Delta^2 f(n+1) - \Delta^2 f(n). \quad (3.45)$$

По формуле (3.43) $\Delta f(n+1) = f(n+2) - f(n+1)$, поэтому из равенства (3.44) следует, что

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n). \quad (3.46)$$

Подставив равенство (3.46) в (3.45), для $\Delta^3 f(n)$ получим

$$\Delta^3 f(n) = f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n). \quad (3.47)$$

Пример 3.10. Найти конечные разности для функции $f(n) = cn^2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \Delta f(n) &= c(n+1)^2 - cn^2 = c(2n+1), \\ \Delta^2 f(n) &= c(2(n+1)+1) - c(2n+1) = 2c, \\ \Delta^3 f(n) &= 2c - 2c = 0. \end{aligned}$$

Проделав аналогичные действия для $f(n) = n^m$, нетрудно убедиться, что $\Delta^m f(n) = m!$.

Теорема 3.9. Если $Z[f(n)] = F(z)$, то

$$Z[\Delta f(n)] = (z-1)F(z) - zf(0). \quad (3.48)$$

Доказательство. Применим Z -преобразование ко всем членам равенства (3.43)

$$Z[\Delta f(n)] = Z[f(n+1)] - Z[f(n)] = Z[f(n+1)] - F(z),$$

принимая во внимание теорему 3.4 (опережения) при $k=1$, запишем

$$Z[\Delta f(n)] = zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0).$$

Получили формулу (3.48).

Применим доказанную теорему к разности первого порядка, получим

$$Z[\Delta^2 f(n)] = (z-1)Z[\Delta f(n)] - z\Delta f(0) = (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f(0) - z\Delta f(0) \quad (3.49)$$

Аналогично для разности третьего порядка находим

$$Z[\Delta^3 f(n)] = (z-1)^3 F(z) - z[(z-1)^2 f(0) + (z-1)\Delta f(0) + \Delta^2 f(0)]. \quad (3.50)$$

3.14. Z -преобразование суммы решетчатой функции

Определение 3.7. Суммой решетчатой функции $f(n)$ называется решетчатая функция

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \quad (3.51)$$

В частности, $g(0) = 0$, $g(1) = f(0)$, $g(2) = f(0) + f(1)$.

Теорема 3.10. Если $Z[f(n)] = F(z)$, то

$$Z \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \right] = \frac{F(z)}{z-1}. \quad (3.52)$$

Доказательство. Обозначим $G(z) = Z[g(n)]$. Первая разность $g(n)$ равна $f(n)$, так как

$$\Delta g(n) = g(n+1) - g(n) = \sum_{k=0}^n f(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) = f(n). \quad (3.53)$$

Следовательно, по теореме 3.9

$$Z[f(n)] = F(z) = Z[\Delta g(n)] = (z-1)G(z) - zg(0), \quad (3.54)$$

но $g(0) = 0$, поэтому

$$G(z) = \frac{F(z)}{z-1}.$$

Теорема о сумме решетчатой функции позволяет находить некоторые конечные суммы.

Пример 3.11. Найти сумму последовательных натуральных чисел $\sum_{k=1}^{n-1} k$.

Решение. По теореме 3.10 с учетом соответствия (3.20)

$$Z \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \right] = \frac{Z[n]}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^3},$$

но из равенства (3.17) при $k=2$

$$Z[n(n-1)] = \frac{2!z}{(z-1)^3}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Заменяя n на $n+1$, получим известное выражения для суммы членов арифметической прогрессии

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Пример 3.12. Вычислить сумму квадратов натуральных чисел $\sum_{k=1}^n k^2$.

Решение. По теореме 3.10 и формуле (3.21)

$$Z \left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right] = \frac{Z[n^2]}{z-1} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2}{(z-1)^4} + \frac{z}{(z-1)^4}.$$

Из соответствия (3.17) при $k=3$ следует

$$Z[n(n-1)(n-2)] = \frac{3!z}{(z-1)^4}.$$

По теореме 3.4 опережения при $m=1$ и предыдущего соответствия

$$\frac{z^2}{(z-1)^4} = \frac{1}{3!} Z[(n+1)n(n-1)].$$

Таким образом получаем соответствие

$$Z \left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right] = \frac{1}{6} (Z[(n+1)n(n-1)] + Z[n(n-1)(n-2)]).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6} ((n+1)n(n-1) + n(n-1)(n-2)) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Заменив n на $n+1$, получим сумму квадратов целых чисел от 1 до n :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

3.15. Теорема умножения оригиналов

Определение 3.8. Сверткой изображений $F(z)$ и $G(z)$ называется величина

$$F(z) * G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\xi) G\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (3.55)$$

Здесь C окружность $|\xi| = R_1 > R$, $|z| > R_1 R$.

Последнее условие обеспечивает аналитичность $G\left(\frac{z}{\xi}\right)$ как функции от ξ на окружности C и внутри неё, так как R – это радиус круга, вне которого сходятся оба ряда (3.1), задающие $F(z)$ и $G(z)$.

Теорема 3.11. Z -преобразование произведения оригиналов $f(n)$ и $g(n)$ равно свертке их изображений.

$$Z[f(n)g(n)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\xi) G\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (3.56)$$

Доказательство. По основной теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F(\xi) G\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = \text{Res} \left[F(\xi) G\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{1}{\xi}, \xi = \infty \right] = c_{-1}, \quad (3.57)$$

где c_{-1} – коэффициент при ξ^{-1} в разложении функции $F(\xi) G\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{1}{\xi}$ в ряд по степеням $\frac{1}{\xi}$ в окрестности бесконечно удаленной точки. По определению Z -преобразования

$$F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \xi^{-n} \quad \text{и} \quad G\left(\frac{z}{\xi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \left(\frac{\xi}{z}\right)^n.$$

Тогда

$$F(\xi) G\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{1}{\xi} = [f(0) + f(1)\xi^{-1} + f(2)\xi^{-2} + \dots] \cdot \left[g(0)\xi^{-1} + \frac{g(1)}{z} + \frac{g(2)\xi}{z^2} + \frac{g(3)\xi^2}{z^3} + \dots \right].$$

Из этого разложения находим c_{-1} – коэффициент при ξ^{-1} :

$$c_{-1} = f(0)g(0) + \frac{f(1)g(1)}{z} + \frac{f(2)g(2)}{z^2} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)g(n)z^{-n} = Z[f(n)g(n)]. \quad (3.58)$$

Из формул (3.57), (3.58) следует, что

$$F(z) * G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\xi)G\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} = Z[f(n)g(n)].$$

3.16. Линейные разностные уравнения

Определение 3.9. Линейным разностным уравнением порядка k для неизвестной решетчатой функции $y(n)$ называется равенство

$$y(n+k) + a_1y(n+k-1) + a_2y(n+k-2) + \dots + a_ky(n) = f(n), \quad (3.59)$$

где $f(n)$ – заданная решетчатая функция, $a_1, a_2, \dots, a_k, a_k \neq 0$ – заданные числа или функции от n .

Используя выражения для разностей $y(n)$, уравнение (3.59) можно переписать в виде

$$\Delta^k y(n) + b_1 \Delta^{k-1} y(n) + \dots + b_k y(n) = f(n), \quad (3.60)$$

где $b_k \neq 0$. Решением разностного уравнения (3.59) называется функция $y = \varphi(n)$, которая обращает уравнение (3.59) в тождество.

Определение 3.10. Решетчатые функции $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ называются линейно независимыми, если равенство

$$c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) + \dots + c_k y_k(n) = 0 \quad (3.61)$$

возможно только тогда, когда все коэффициенты в уравнении (3.61) равны нулю:

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0.$$

Если равенство выполнено, когда хотя бы один коэффициент $c_j \neq 0$, то функции $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ называются линейно зависимыми.

Если в уравнении (3.59) функция $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным разностным уравнением. Для решений однородных разностных уравнений справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.12. Если $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ решения однородного уравнения

$$y(n+k) + a_1y(n+k-1) + a_2y(n+k-2) + \dots + a_ky(n) = 0, \quad (3.62)$$

то функция $y(n) = A\varphi_1(n) + B\varphi_2(n)$ (A и B – произвольные числа) тоже является решением уравнения (3.62).

Структура общего решения однородного уравнения (3.62) определяется следующей теоремой.

Теорема 3.13. Если $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ – совокупность линейно независимых решений однородного разностного уравнения (3.62), то его общее решение задается равенством

$$y(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n) + \dots + c_k y_k(n), \quad (3.63)$$

где c_i – произвольные константы.

Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения (3.59) имеет вид

$$y(n) = \sum_{j=1}^k c_j y_j(n) + y^*(n), \quad (3.64)$$

т. е. равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения (3.62) и частного решения $y^*(n)$ неоднородного уравнения (3.59).

3.17. Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим разностное уравнение

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \dots + a_k y(n) = 0, \quad (3.65)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k \neq 0$ – действительные числа.

Решение уравнения (3.65) будем искать в виде

$$y(n) = \mu^n, \quad (3.66)$$

где μ – неизвестное число, причем $\mu \neq 0$. Подставим μ^n в уравнение (3.65):

$$\mu^{n+k} + a_1 \mu^{n+k-1} + a_2 \mu^{n+k-2} + \dots + a_k \mu^n = 0. \quad (3.67)$$

Так как $\mu \neq 0$, то, разделив все члены на $\mu^n \neq 0$, получим уравнение k -й степени для μ :

$$\mu^k + a_1 \mu^{k-1} + a_2 \mu^{k-2} + \dots + a_k \mu = 0. \quad (3.68)$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением для разностного уравнения (3.65).

Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ – корни характеристического уравнения. Предположим, что все они действительные и различные. Можно строго доказать, что решетчатые функции $y_1(n) = \mu_1^n, y_2(n) = \mu_2^n, \dots, y_k(n) = \mu_k^n$ являются линейно независимыми. Тогда общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$y(n) = \sum_{j=1}^k c_j \mu_j^n. \quad (3.69)$$

Если среди корней характеристического уравнения имеется комплексный корень μ_m , то для него существует и сопряженный корень $\bar{\mu}_m$. Обозначим ρ_m, φ_m – модуль и аргумент числа μ_m и запишем μ_m^n в тригонометрической форме:

$$\mu_m^n = \rho_m^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Подставив μ_m^n в уравнение (3.65), можно убедиться, что действительная и мнимая части комплексного решения тоже являются решениями этого уравнения. Таким образом, каждой паре комплексно сопряженных корней соответствует два решения:

$$y_m = \rho_m^n \cos n\varphi, \quad y_{m+1} = \rho_m^n \sin n\varphi.$$

Корню μ_m кратности r соответствует r решений вида $\mu_m^n, n\mu_m^n, n^2\mu_m^n, \dots, n^{r-1}\mu_m^n$.

3.18. Решение разностных уравнений с помощью Z -преобразования

Пусть дано разностное уравнение

$$\Delta^k y(n) + b_1 \Delta^{k-1} y(n) + \dots + b_k y(n) = f(n) \quad (3.70)$$

с начальными условиями

$$y(0) = c_0, \quad \Delta y(0) = c_1, \quad \Delta^2 y(0) = c_2, \quad \dots, \quad \Delta^{k-1} y(0) = c_{k-1}, \quad (3.71)$$

где $b_1, b_2, \dots, b_k \neq 0, c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ – заданные числа, $f(n)$ – заданная функция, $y(n)$ – искомая функция.

Обозначим $Y(z) = Z[y(n)]$. Применим Z -преобразование ко всем членам уравнения (3.70) и, воспользовавшись теоремой о Z -преобразовании разности решетчатой функции (3.48), с учетом начальных условий (3.71), получим алгебраическое уравнение первой степени для $Y(z)$.

Пользуясь выражениями для разностей $\Delta^k y(n)$, уравнение (3.70) можно представить в виде

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \dots + a_k y(n) = f(n) \quad (3.72)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad y(2) = y_2, \quad \dots, \quad y(k-1) = y_{k-1}, \quad (3.73)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_k \neq 0$, y_0, y_1, \dots, y_{k-1} – заданные числа, $f(n)$ – заданная функция.

Применяя Z -преобразование ко всем членам уравнения (3.72), с помощью теоремы 3.4 опережения, с учетом начальных условий, получим алгебраическое уравнение для $Y(z)$, из которого находим изображение $Y(z)$. Совершая обратное преобразование $y(n) = z^{-1}[Y(z)]$ и, используя один из приемов, описанных в параграфе 3.11, восстанавливаем неизвестную функцию.

Если в начальных условиях (3.71), (3.73) правые части – произвольные числа, то с помощью Z -преобразования можно найти общее решение разностного уравнения.

Пример 3.13. Решить уравнение $\Delta^2 y(n) - 6\Delta y(n) + 9y(n) = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $\Delta y(0) = -1$.

Решение. Применим Z -преобразование ко всем членам этого уравнения, учитывая свойство линейности (3.4):

$$Z[\Delta^2 y(n)] - 6Z[\Delta y(n)] + 9Z[y(n)] = 0.$$

Обозначим $Z[y(n)] = Y(z)$. По формуле (3.48)

$$Z[\Delta y(n)] = (z-1)Y(z) - zy(0) = (z-1)Y(z) - z.$$

Так как $\Delta^2 y(n)$ – разность разности первого порядка функции $y(n)$, то по формуле (3.48)

$$Z[\Delta^2 y(n)] = (z-1)Z[\Delta y(n)] - z\Delta y(0).$$

Подставив сюда полученное выражение для $Z[\Delta y(n)]$ и учитывая, что $\Delta y(0) = -1$, запишем

$$Z[\Delta^2 y(n)] = (z-1)^2 Y(z) - z(z-1) + z.$$

Таким образом получаем алгебраическое уравнение

$$(z-1)^2 Y(z) - z(z-1) + z - 6[(z-1)Y(z) - z] + 9Y(z) = 0.$$

Приведя подобные, запишем

$$\begin{aligned} [(z-1)^2 - 6(z-1) + 9]Y(z) &= z(z-1) - 7z, \\ (z-4)^2 Y(z) &= z(z-8), \\ Y(z) &= \frac{z^2 - 8z}{(z-4)^2} = \frac{(z^2 - 8z + 16) - 16}{(z-4)^2} = 1 - \frac{16}{(z-4)^2}. \end{aligned}$$

Так как по предельному соотношению (3.25) $\lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = y(0) = 1$, то надо найти оригинал для изображения $\frac{16}{(z-4)^2}$. Из

табл. Б.4 прил. Б находим $Z^{-1} \left[\frac{z}{(z-4)^2} \right] = \frac{1}{4} n 4^n$, тогда по теореме 3.3 (запаздывания) при $m=1$ имеем

$$Z^{-1} \left[\frac{1}{(z-4)^2} \right] = Z^{-1} \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z-4)^2} \right] = \frac{1}{4} (n-1) 4^{n-1}.$$

Таким образом, $y(n) = -4(n-1)4^{n-1} = -(n-1)4^n$, $n \geq 1$.

Сделаем проверку полученного решения. Полученная выше функция $y(n)$ будет решением поставленной задачи, если при подстановке в исходное уравнение мы получим тождество и значения $y(0)$, $\Delta y(0)$ будут равны заданным в условиях числам.

Вычислим разности $\Delta y(n)$ и $\Delta^2 y(n)$ по формулам (3.43) и (3.44):

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n) = -n 4^{n+1} + (n-1) 4^n = -4^n (3n+1),$$

$$\Delta^2 y(n) = \Delta y(n+1) - \Delta y(n) = -4^{n+1} (3(n+1)+1) + 4^n (3n+1) = -4^n (9n+15).$$

Полученные выражения подставим в левую часть исходного уравнения и вынесем 4^n за скобки:

$$-4^n (9n+15) + 6 \cdot 4^n (3n+1) - 9(n-1) 4^n = 4^n (-9n-15+18n+6-9n+9) \equiv 0.$$

Вычислим $\Delta y(0)$:

$$\Delta y(0) = -4^n (3n+1)|_{n=0} = -1.$$

Таким образом, функция $y(n) = -(n-1)4^n$ удовлетворяет исходному уравнению и начальным условиям.

Пример 3.14. Решить уравнение $y(n+3) - 3y(n+2) + 3y(n+1) - y(n) = h(n)$ с начальными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$.

Решение. Применяя Z -преобразование ко всем членам этого уравнения, учитывая теорему опережения (3.8) и начальные условия, запишем

$$Z[y(n)] = Y(z),$$

$$Z[h(n)] = \frac{z}{z-1},$$

$$Z[y(n+1)] = zY(z) - zy(0) = zY(z),$$

$$Z[y(n+2)] = z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) = z^2Y(z),$$

$$Z[y(n+3)] = z^3Y(z) - z^3y(0) - z^2y(1) - zy(2) = z^3Y(z) - z.$$

Из этих соотношений следует уравнение для $Y(z)$:

$$z^3Y(z) - z - 3z^2Y(z) + 3zY(z) - Y(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Вынесем $Y(z)$ за скобки:

$$Y(z)(z^3 - 3z^2 + 3z - 1) = \frac{z}{z-1} + z.$$

Свернув куб разности, найдем $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^4} + \frac{z}{(z-1)^3}.$$

Отсюда для $y(n)$ имеем

$$y(n) = Z^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^4} \right] - Z^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^3} \right].$$

Из табл. Б.4 прил. Б находим оригиналы:

$$Z^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^4} \right] = \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2), \quad Z^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^3} \right] = \frac{1}{2}n(n-1),$$

тогда $y(n) = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{6}n(n^2-1)$.

Пример 3.15. Бесконечная последовательность чисел $f(n)$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$, задана несколькими первыми членами: 1, 2, 7, 16, 29, ... Найти $f(20)$.

Решение. Заметим, что первые разности этой последовательности $\Delta f(0) = 2 - 1 = 1$, $\Delta f(1) = 7 - 2 = 5$, $\Delta f(2) = 16 - 7 = 9$, $\Delta f(3) = 29 - 16 = 13$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой $\Delta f(1) - \Delta f(0) = \Delta f(2) - \Delta f(1) = \Delta f(3) - \Delta f(2) = 4$. Значит, разность второго порядка $\Delta^2 f(n) = 4$. Следовательно, $f(n)$ удовлетворяет разностному уравнению $\Delta^2 f(n) = 4$ с начальными условиями $f(0) = 1$, $f(1) = 2$. Применим Z -преобразование ко всем членам этого уравнения, используя равенство (3.49):

$$Z[\Delta^2 f(n)] = (z-1)Z[\Delta f(n)] - z\Delta f(0) =$$

$$\begin{aligned}
&= (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f(0) - z\Delta f(0) = \\
&= (z-1)^2 F(z) - z(z-1) - z = (z-1)^2 F(z) - z^2 \\
&(z-1)^2 F(z) - z^2 = \frac{4z}{z-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} + \frac{4z}{(z-1)^3}.$$

По табл. Б.4 прил. Б находим оригиналы:

$$Z^{-1} \left[\frac{z^2}{(z-1)^2} \right] = n+1, \quad Z^{-1} \left[\frac{4z}{(z-1)^3} \right] = 4C_n^2 = 2n(n-1).$$

Таким образом, $f(n) = 2n^2 - n + 1$ и $f(20) = 800 - 20 + 1 = 781$.

3.19. Решение систем линейных разностных уравнений

Решение систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами проводится в том же порядке, как и разностных уравнений с одной неизвестной функцией.

Пример 3.16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(n+1) - 3x(n) - y(n) = 0, \\ y(n+1) + y(n) + 5x(n) = 0, \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Решение. Применим Z -преобразование ко всем членам уравнений системы:

$$Z[x(n)] = X(z), \quad Z[y(n)] = Y(z).$$

По теореме 3.4 (опережения) и начальным условиям находим Z -преобразование для $x(n+1)$ и $y(n+1)$:

$$Z[x(n+1)] = zX(z) - 2z, \quad Z[y(n+1)] = zY(z) - z,$$

и переходим к алгебраической системе для изображений:

$$\begin{cases} zX(z) - 2z - 3X(z) - Y(z) = 0, \\ zY(z) - z + Y(z) + 5X(z) = 0. \end{cases}$$

После преобразований система примет вид

$$\begin{cases} (z-3)X(z) - Y(z) = 2z, \\ 5X(z) + (z+1)Y(z) = z. \end{cases}$$

Вычислим $X(z)$ и $Y(z)$ по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z-3 & -1 \\ 5 & z+1 \end{vmatrix} = (z-3)(z+1) + 5 = z^2 - 2z + 2,$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 2z & -1 \\ z & z+1 \end{vmatrix} = 2z(z+1) + z = 2z(z+1, 5),$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} z-3 & 2z \\ 5 & z \end{vmatrix} = (z-3)z - 10z = z(z-13),$$

$$X(z) = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{2z(z+1, 5)}{z^2 - 2z + 2},$$

$$Y(z) = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{z(z-13)}{z^2 - 2z + 2}.$$

Чтобы найти оригиналы для изображений $X(z)$ и $Y(z)$, из табл. Б.4 прил. Б выпишем соответствия:

$$Z^{-1} \left[\frac{az \sin \beta}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2} \right] = a^n \sin \beta n,$$

$$Z^{-1} \left[\frac{z(z - a \cos \beta)}{z^2 - 2az \cos \beta + a^2} \right] = a^n \cos \beta n.$$

Выражение $z^2 - 2az \cos \beta + a^2$ станет равным квадратному трехчлену $z^2 - 2z + 2$, если принять $a \cos \beta = 1$, $a = \sqrt{2}$. Из этого следует, что $\cos \beta = \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $a \sin \beta = 1$. При таких значениях параметров a и β написанные выше соответствия примут следующий вид:

$$Z^{-1} \left[\frac{z}{z^2 - 2z + 2} \right] = 2^{n/2} \sin \frac{\pi}{4} n, \quad (3.74)$$

$$Z^{-1} \left[\frac{z(z-1)}{z^2 - 2z + 2} \right] = 2^{n/2} \cos \frac{\pi}{4} n. \quad (3.75)$$

Формулы для $X(z)$ и $Y(z)$ перепишем в виде

$$X(z) = \frac{2z(z+1, 5)}{z^2 - 2z + 2} = \frac{2z((z-1) + 2, 5)}{z^2 - 2z + 2} = \frac{2z(z-1)}{z^2 - 2z + 2} + \frac{5z}{z^2 - 2z + 2},$$

$$Y(z) = \frac{z(z-13)}{z^2-2z+2} = \frac{z((z-1)-12)}{z^2-2z+2} = \frac{z(z-1)}{z^2-2z+2} - \frac{12z}{z^2-2z+2}.$$

Совершая обратные Z -преобразования, запишем для $x(n)$ и $y(n)$ следующие выражения:

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = Z^{-1} \left[\frac{2z(z-1)}{z^2-2z+2} \right] + Z^{-1} \left[\frac{5z}{z^2-2z+2} \right],$$

$$y(n) = Z^{-1}[Y(z)] = Z^{-1} \left[\frac{z(z-1)}{z^2-2z+2} \right] - Z^{-1} \left[\frac{12z}{z^2-2z+2} \right].$$

Принимая во внимание равенства (3.74) и (3.75), находим решение системы разностных уравнений:

$$x(n) = 2 \cdot 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4} + 5 \cdot 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4},$$

$$y(n) = 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4} - 12 \cdot 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Упражнения

1. Показать, что функция $f(n) = (e^n - e^{-n})h(n)$ является решетчатой функцией-оригиналом.

2. Какие из решетчатых функций $(2 - \sin^2 n)h(n)$, $\operatorname{ctg} nh(n)$, $\frac{\cos^2 n - 1}{n}h(n)$ являются функциями-оригиналами?

3. Каково соответствие между оригиналом и его Z -изображением: взаимно однозначное или просто однозначное?

4. Пользуясь определением найти изображение функции $f(n) = b^n h(n)$.

5. Используя свойство линейности, найти изображение функции $f(n) = \cos^2 n$.

6. Применяв теорему затухания, найти изображение для функции $f(n) = 2^n \sin n$.

7. Используя теорему запаздывания, найти изображение для функции $f(n) = \sin(n-1)$.

8. По теореме опережения найти изображение функции $f(n) = \sin(n+1)$.

9. Если продифференцировать изображение некоторой решетчатой функции, то изображением какой функции будет служить производная?

10. Найти изображение функции $f(n) = n \cdot 3^n$.

11. Найти изображение функции $f(n) = \frac{(n-1) \sin^2 n}{n}$ по теореме интегрирования изображения.

12. Используя предельные соотношения, найти значения оригинала $f(n)$ с изображением $F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, для $n = 1, 2, 3, 4$.

13. Как найти изображение для $n \cos \omega n$, зная изображение для $f(n) = \sin \omega n$?

14. Показать, что свертка решетчатых функций является коммутативной операцией.

15. Найти разность второго порядка для $f(n) = (-1)^n$.

16. Найти сумму последовательности чисел $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$.

17. Найти оригинал $f(n)$ для $F(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, используя определение Z -преобразования.

18. Сформулировать теорему обращения для Z -преобразования.

19. Какова структура общего решения линейного однородного разностного уравнения порядка k ?

20. Какова структура общего решения линейного неоднородного разностного уравнения порядка k ?

Задачи

1. Пользуясь определением и свойствами Z -преобразования, найти изображения следующих функций:

1.1. а) $f(n) = e^{-n} \sin 2n$;

б) $f(n) = ne^{5n}$.

1.2. а) $f(n) = e^{2n} \operatorname{sh} 3n$;

б) $f(n) = n \sin \alpha n$.

1.3. а) $f(n) = e^{5n} \operatorname{ch} 2n$;

б) $f(n) = n^2 + 5n$.

1.4. а) $f(n) = e^{-3n} \cos n$;

б) $f(n) = n \operatorname{ch} 2n$.

1.5. а) $f(n) = e^{-2n} \operatorname{sh} n$;

б) $f(n) = n^2 e^{3n}$.

1.6. а) $f(n) = e^{3n} \sin 5n$;

б) $f(n) = 2n \operatorname{sh} 3n$.

1.7. а) $f(n) = e^{5n} \sin 2n$;

б) $f(n) = 3n \cos n$.

1.8. а) $f(n) = e^n \cos 2n$;

б) $f(n) = n \operatorname{sh} 5n$.

1.9. а) $f(n) = e^{-n} \operatorname{sh} 3n$;

б) $f(n) = n^2 e^{-2n}$.

1.10. а) $f(n) = e^{3n} \cos 2n$;

б) $f(n) = 3n \sin n$.

1.11. а) $f(n) = e^{-2n} \cos 3n$;

б) $f(n) = n \sin^2 n$.

1.12. а) $f(n) = e^n \sin 4n$;

б) $f(n) = n \cdot 3^n$.

1.13. а) $f(n) = e^{4n} \operatorname{ch} 3n$;

б) $f(n) = n^2 \cdot 5^n$.

1.14. а) $f(n) = e^{-n} \cos 3n$;

б) $f(n) = 3n \operatorname{sh} 2n$.

1.15. a) $f(n) = e^n \operatorname{ch} 2n$;

1.16. a) $f(n) = e^{2n} \sin 3n$;

1.17. a) $f(n) = e^{-3n} \operatorname{sh} 2n$;

1.18. a) $f(n) = e^{3n} \operatorname{ch} 5n$;

1.19. a) $f(n) = e^n \operatorname{sh} 3n$;

1.20. a) $f(n) = e^{2n} \operatorname{ch} n$;

1.21. a) $f(n) = e^{2n} \operatorname{sh} 3n$;

1.22. a) $f(n) = e^{3n} \operatorname{sh} 2n$;

1.23. a) $f(n) = e^{-3n} \operatorname{ch} 2n$;

1.24. a) $f(n) = 2^{2n} \cos 5n$;

1.25. a) $f(n) = e^{-2n} \sin 3n$;

1.26. a) $f(n) = e^{5n} \operatorname{sh} n$;

1.27. a) $f(n) = e^{4n} \cos 2n$;

1.28. a) $f(n) = e^{-3n} \sin 5n$;

1.29. a) $f(n) = e^{-5n} \operatorname{sh} n$;

1.30. a) $f(n) = e^{4n} \sin 3n$;

б) $f(n) = n^2 e^{-3n}$.

б) $f(n) = n \sin \pi n/2$.

б) $f(n) = n \cos \pi n$.

б) $f(n) = (n+3) \operatorname{sh} 2n$.

б) $f(n) = 2n \cos \pi n/3$.

б) $f(n) = (3n+2) \operatorname{ch} 2n$.

б) $f(n) = n \sin \alpha n$.

б) $f(n) = 2n \sin \pi n/6$.

б) $f(n) = n e^{2n}$.

б) $f(n) = (2n+3) \operatorname{ch} n$.

б) $f(n) = n^2 2^n$.

б) $f(n) = n \cdot 5^n$.

б) $f(n) = 2n^2 - 3n$.

б) $f(n) = 3n \cos \pi n/2$.

б) $f(n) = (n+2) \operatorname{sh} 3n$.

б) $f(n) = 2n \sin \pi n/3$.

2. Найти оригиналы по заданным изображениям:

2.1. a) $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e)}$.

2.2. a) $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-e)}$.

2.3. a) $F(z) = \frac{z^2}{(z-e^2)(z-1)}$.

2.4. a) $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)^4}$.

2.5. a) $F(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \cdot \frac{z}{z-1}$.

2.6. a) $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-4)(z-5)}$.

2.7. a) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 7z + 10}$.

2.8. a) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 5}$.

2.9. a) $F(z) = \frac{1}{(z-3)(z-4)}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^4 - 1}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^4 - 16}$.

б) $F(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$.

б) $F(z) = \frac{z^2}{z^3 + 1}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^3 + 1}$.

б) $F(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}$.

б) $F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^2 + 2az + 2a^2}$.

2.10. a) $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 1}$.

2.11. a) $F(z) = \frac{1}{(z+2)(z^2-9)}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^3 - 1}$.

2.12. a) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$.

б) $F(z) = \frac{az + b}{z^2 + 1}$.

2.13. a) $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 1}$.

2.14. a) $F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1}$.

б) $F(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$.

2.15. a) $F(z) = \frac{z}{(z - e^{-1})(z - e)}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 + 5z}{z^2 - 1}$.

2.16. a) $F(z) = \frac{z}{(z-a)^2(z-b)}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 - z}{z^3 + 1}$.

2.17. a) $F(z) = \frac{1}{(z+2)(z^2-1)}$.

б) $F(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-2)}$.

2.18. a) $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2-4)}$.

б) $F(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z+3)}$.

2.19. a) $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2-3z+2)}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 1}$.

2.20. a) $F(z) = \frac{z}{(z+1)(z^2-1)}$.

б) $F(z) = \frac{z^2}{(z^2-2)(z^2-1)}$.

2.21. a) $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^3 + 1}$.

2.22. a) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 8}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^3 + 8}$.

2.23. a) $F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^3 + 1}$.

2.24. a) $F(z) = \frac{1}{(z+3)(z^2-9)}$.

б) $F(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z^2 - z + 1)^2}$.

2.25. a) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}$.

б) $F(z) = \frac{z}{(z^2 - 9)(z + 1)}$.

2.26. a) $F(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2-6z+8)}$.

б) $F(z) = \frac{3z^2 - 2z}{z^2 + 1}$.

2.27. a) $F(z) = \frac{z}{(z-2)^3}$.

б) $F(z) = \frac{z}{z^3 - 8}$.

2.28. a) $F(z) = \frac{z}{(z+1)^4}$.

б) $F(z) = \frac{z^2}{z^3 + 8}$.

$$2.29. \text{ a) } F(z) = \frac{1}{(z+3)^3}.$$

$$\text{б) } F(z) = \frac{2z^2 - 3z}{z^2 + 1}.$$

$$2.30. \text{ a) } F(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2 - 5z + 6)}.$$

$$\text{б) } F(z) = \frac{2z^2 - z}{z^3 - 8}.$$

3. Решить линейное разностное уравнение. Сделать проверку:

- | | |
|---|------------------------------|
| 3.1. $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 1,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.2. $2f(n+2) - 5f(n+1) + 3f(n) = 0,$ | $f(0) = 0, f(1) = 1.$ |
| 3.3. $f(n+2) - 3f(n+1) + 2f(n) = 2^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.4. $f(n+2) + f(n) = 1 - (-1)^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 1.$ |
| 3.5. $f(n+2) - 6f(n+1) + 9f(n) = n \cdot 3^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 1.$ |
| 3.6. $f(n+2) - 4f(n) = 4^n,$ | $f(0) = 1, f(1) = 1.$ |
| 3.7. $f(n+2) - 6f(n+1) + 5f(n) = 0,$ | $f(0) = 0, f(1) = 1.$ |
| 3.8. $f(n+2) + 3f(n+1) + 2f(n) = 0,$ | $f(0) = 1, f(1) = 0.$ |
| 3.9. $3f(n+2) - 5f(n+1) + 2f(n) = 0,$ | $f(0) = 0, f(1) = 1.$ |
| 3.10. $f(n+2) - 3f(n+1) - 4f(n) = (-1)^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = -1.$ |
| 3.11. $f(n+3) - f(n+2) - f(n+1) + f(n) = n^2,$ | $f(0) = f(1) = f(2) = 0.$ |
| 3.12. $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = \cos \pi n,$ | $f(0) = f(1) = f(2) = 0.$ |
| 3.13. $2f(n+2) - 5f(n+1) + 2f(n) = e^{n/2},$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.14. $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = n^2,$ | $f(0) = f(1) = f(2) = 0.$ |
| 3.15. $f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0,$ | $f(0) = f(1) = 0, f(2) = 1.$ |
| 3.16. $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 1,$ | $f(0) = 0, f(1) = 1.$ |
| 3.17. $f(n+2) - f(n) = 1,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.18. $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0,$ | $f(0) = 1, f(1) = 0.$ |
| 3.19. $f(n+2) - 4f(n+1) - 5f(n) = (-1)^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.20. $f(n+2) + 5f(n+1) + 6f(n) = (-2)^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.21. $f(n+2) - 8f(n+1) + 15f(n) = 1,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.22. $f(n+2) - f(n+1) - 2f(n) = 2^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.23. $f(n+2) + 5f(n+1) + 6f(n) = (-3)^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.24. $f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n) = 3^n,$ | $f(0) = 3, f(1) = 1.$ |
| 3.25. $f(n+2) - 7f(n+1) + 10f(n) = 0,$ | $f(0) = 1, f(1) = 0.$ |
| 3.26. $f(n+2) - 7f(n+1) + 10f(n) = 5^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.27. $f(n+2) - 3f(n+1) - 10f(n) = (-2)^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = 0.$ |
| 3.28. $f(n+2) - 3f(n+1) - 4f(n) = 4^n,$ | $f(0) = 0, f(1) = -1.$ |

3.29. $f(n+2) - 6f(n+1) + 5f(n) = 0,$

$f(0) = 0, f(1) = 1.$

3.30. $f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0,$

$f(0) = 0, f(1) = 1.$

4. Решить систему разностных уравнений с начальными условиями:

$$4.1. \begin{cases} x(n+1) + x(n) - y(n) = 0, & x(0) = 2, \\ y(n+1) - 2x(n) + y(n) = 0, & y(0) = 0. \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} x(n+1) + 2x(n) - y(n) = 0, & x(0) = 1, \\ y(n+1) - 2x(n) + y(n) = 0, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} x(n+1) + 2x(n) - 3y(n) = 0, & x(0) = 2, \\ y(n+1) - 2x(n) + y(n) = 0, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} x(n+1) - 3x(n) + 4y(n) = 0, & x(0) = 0, \\ y(n+1) - x(n) + y(n) = 0, & y(0) = 3. \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} x(n+1) + 3x(n) + 2y(n) = 0, & x(0) = -1, \\ y(n+1) + x(n) + 2y(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$4.6. \begin{cases} x(n+1) + 2x(n) + 3y(n) = 0, & x(0) = 1, \\ y(n+1) + 4x(n) + 3y(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} x(n+1) - 2x(n) + 3y(n) = 0, & x(0) = 2, \\ y(n+1) + 4x(n) - 3y(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} x(n+1) - 4x(n) + 3y(n) = 0, & x(0) = 2, \\ y(n+1) + 2x(n) - 3y(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} x(n+1) - 2x(n) + 3y(n) = 0, & x(0) = 1, \\ y(n+1) + 2x(n) - y(n) = 0, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} x(n+1) - 3x(n) + 2y(n) = 0, & x(0) = 2, \\ y(n+1) - 2x(n) + y(n) = 0, & y(0) = -1. \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} x(n+1) - 4x(n) + 2y(n) = 0, & x(0) = 2, \\ y(n+1) - 2x(n) + y(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} x(n+1) - 4x(n) + 2y(n) = (-1)^n, & x(0) = 1, \\ y(n+1) - 2x(n) + y(n) = 0, & y(0) = 1. \end{cases}$$

- 4.13. $\begin{cases} x(n+1) - x(n) - 2y(n) = (-2)^n, \\ y(n+1) + 2x(n) + 3y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -3, \\ y(0) = 2. \end{matrix}$
- 4.14. $\begin{cases} x(n+1) - x(n) - 2y(n) = 2^n, \\ y(n+1) + 2x(n) + 3y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{matrix}$
- 4.15. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) - 2y(n) = 2^n, \\ y(n+1) + 2x(n) + 3y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{matrix}$
- 4.16. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) + 2y(n) = 2^n, \\ y(n+1) + 2x(n) - 2y(n) = (-2)^n, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{matrix}$
- 4.17. $\begin{cases} x(n+1) + x(n) - 2y(n) = n, \\ y(n+1) + 4y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = -1. \end{matrix}$
- 4.18. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) + 2y(n) = (-1)^n, \\ y(n+1) - x(n) + 2y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = -1. \end{matrix}$
- 4.19. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) + 4y(n) = (-1)^n, \\ y(n+1) + x(n) + y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -3. \end{matrix}$
- 4.20. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) + 4y(n) = n + 1, \\ y(n+1) + x(n) + y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$
- 4.21. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) + 4y(n) = n, \\ y(n+1) + x(n) + y(n) = n + 1, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = -1, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$
- 4.22. $\begin{cases} x(n+1) - 3x(n) - y(n) = 0, \\ y(n+1) - 2x(n) - 2y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{matrix}$
- 4.23. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) - y(n) = 3^n, \\ y(n+1) - x(n) - 2y(n) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{matrix}$
- 4.24. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) - y(n) = 4 \cdot 2^n, \\ y(n+1) - x(n) - 2y(n) = 4 \cdot 5^n, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -2. \end{matrix}$
- 4.25. $\begin{cases} x(n+1) - 2x(n) - y(n) = 0, \\ y(n+1) - x(n) - 2y(n) = (n+1)2^n, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1, \\ y(0) = -2. \end{matrix}$
- 4.26. $\begin{cases} x(n+1) + x(n) - 5y(n) = 0, \\ y(n+1) - 2y(n) = h(n), \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 2, \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

$$\begin{aligned} 4.27. \quad & \begin{cases} x(n+1) + x(n) - 4y(n) = 0, \\ y(n+1) - x(n) - 2y(n) = 3(h(n) + (-1)^n), \end{cases} & \begin{cases} x(0) = -2, \\ y(0) = 1. \end{cases} \\ 4.28. \quad & \begin{cases} x(n+1) + x(n) + 6y(n) = 0, \\ y(n+1) + x(n) + 2y(n) = 15(h(n) - (-1)^n), \end{cases} & \begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = -5. \end{cases} \\ 4.29. \quad & \begin{cases} x(n+1) + x(n) + 6y(n) = 0, \\ y(n+1) + x(n) + 2y(n) = h(n) - 5(-1)^n, \end{cases} & \begin{cases} x(0) = -1, \\ y(0) = -2. \end{cases} \\ 4.30. \quad & \begin{cases} x(n+1) + 2x(n) + y(n) = 0, \\ y(n+1) + 4x(n) + 5y(n) = 2^n, \end{cases} & \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

4. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

4.1. Основные определения

Пусть $f(n)$ – решетчатая функция-оригинал и $p = \sigma + i\tau$ – комплексная переменная.

Определение 4.1. Дискретное преобразование Лапласа ставит в соответствие решетчатой функции $f(n)$ функцию комплексной переменной $F^*(p)$ по формуле

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-pn} \quad (4.1)$$

при условии, что ряд в правой части равенства сходится.

Дискретное преобразование функции $f(n)$ обозначим символом D :

$$D[f(n)] = F^*(p)$$

и будем говорить, что $F^*(p)$ – это D -преобразование функции $f(n)$. Если в ряду (3.1), задающем Z -преобразование функции $f(n)$ ввести новую независимую переменную p , положив $z = e^p$ и обозначив

$$F(z) = F(e^p) = F^*(p), \quad (4.2)$$

получим формулу (4.1). Следует отметить, что соответствие $z = e^p$ между точками комплексной плоскости z и p не является взаимно однозначным, так как функция e^p имеет период $2\pi i$:

$$z = e^{p+2k\pi i} = e^p \cdot e^{2k\pi i} = e^p (\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = e^p, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из последнего равенства и равенства (4.2) следует, что $F^*(p + 2\pi i) = F^*(p)$.

Если в комплексной плоскости p взять полосу шириной 2π , параллельную действительной оси, то соответствие между ее точками и точками плоскости z станет взаимно однозначным.

Выберем в качестве основной полосу $-\pi \leq \tau \leq \pi$.

В полуполосе $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ функция $F(p)$ является аналитической.

Теорема 4.1. Если ряд (4.1) сходится при $\operatorname{Re} p = \sigma_0$, то он сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Доказательство. Запишем ряд (4.1) при $\operatorname{Re} p = \sigma_0$:

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-pn} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-(\sigma_0+i\tau)n}. \quad (4.3)$$

По условию теоремы ряд (4.3) сходится. Следовательно, по необходимому условию сходимости ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)e^{-(\sigma_0+i\tau)n} = 0$ и его члены по абсолютной величине не превосходят некоторое значение $M > 0$ при всех $n > 0$:

$$|f(n)e^{-(\sigma_0+i\tau)n}| = |f(n)| \cdot |e^{-\sigma_0 n}| \cdot |e^{-i\tau n}| = |f(n)|e^{-\sigma_0 n} < M. \quad (4.4)$$

Составим ряд из абсолютных величин ряда (4.3) при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)e^{-(\sigma+i\tau)n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| \cdot |e^{-\sigma n}| \cdot |e^{-i\tau n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|e^{-\sigma n}.$$

Умножим и разделим все члены ряда в правой части на $e^{-\sigma_0 n}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)e^{-(\sigma+i\tau)n}| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sigma_0 n} |f(n)| e^{-(\sigma-\sigma_0)n}. \quad (4.5)$$

При $\sigma - \sigma_0 > 0$, $|e^{-(\sigma-\sigma_0)n}| < 1$, поэтому из неравенства (4.4) следует, что члены ряда (4.5) меньше членов убывающей геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} M e^{-(\sigma-\sigma_0)n}$. По признаку сравнения это означает, что ряд (4.1) сходится абсолютно.

Упомянутая геометрическая прогрессия является мажорирующим рядом для ряда (4.1), который по признаку Вейерштрасса является сходящимся.

Равномерная сходимоть ряда (4.1) при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ означает, что его сумма $F(p)$ является аналитической функцией переменной p . Если ряд (4.1) расходится при $\operatorname{Re} p = \sigma_0$ то, очевидно, что он расходится при всех p , для которых $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

Аналогично доказывается, что если ряд (4.1) расходится при $\operatorname{Re} p = \sigma_0$, то он расходится и при $\operatorname{Re} p < \sigma_0$.

Значение числа σ_0 , для которого при $\sigma > \sigma_0$ ряд (4.1) сходится, а при $\sigma < \sigma_0$ расходится, называется абсциссой сходимости.

Из неравенства (4.4) следует, что абсцисса сходимости σ_0 — это нижняя граница значений показателя роста s_0 . Если для данной решетчатой функции $\sigma_0 < \infty$, то ряд (4.1) сходится при всех значениях p , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p > \sigma_0$.

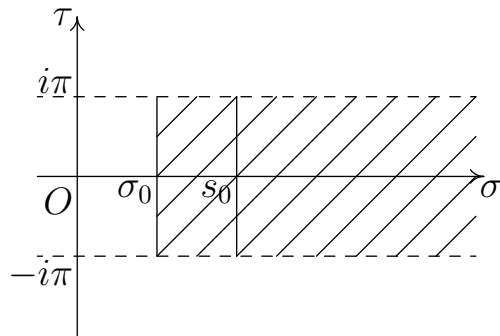


Рис. 4.1

Пример 4.1. Найти $F^*(p)$ для $f(n) = e^{an}$, где a – некоторое комплексное число.

Решение. По определению

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} e^{-pn} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(p-a)n}.$$

Если $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$, то $|e^{-(p-a)}| < 1$ и ряд, задающий $F^*(p)$, является убывающей бесконечной геометрической прогрессией со знаменателем $e^{-(p-a)}$ и его сумма

$$F^*(p) = \frac{1}{1 - e^{-(p-a)}} = \frac{e^p}{e^p - e^a}. \quad (4.6)$$

Абсциссой сходимости σ_0 в этом случае является $\operatorname{Re} a$. Соотношение (4.6) можно получить из равенства (3.3), приняв в нем $z = e^p$, $a = e$.

4.2. Обратное D -преобразование

Обратным дискретным преобразованием Лапласа называется переход от функции $F^*(p)$ к решетчатой функции

$$f(n) = D^{-1}[F^*(p)]. \quad (4.7)$$

Символ D^{-1} обозначает обратное дискретное преобразование Лапласа.

Обозначим $z = e^p$, тогда ряд (4.1) преобразуется в ряд Лорана (3.1):

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}, \quad (4.8)$$

а его коэффициенты вычисляются по формуле (3.31):

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz, \quad (4.9)$$

где C – окружность $|z| = R > e^{\sigma_0}$ является границей области, включающей все особые точки функции $F(z)$.

Если C – окружность $|z| = R > e^{\sigma_0}$, то в основной полуполосе плоскости p ей соответствует отрезок $[\gamma - i\pi; \gamma + i\pi]$, где $\gamma = \ln R > \sigma_0$. Поскольку $dz = e^p dp$, то

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\pi}^{\gamma + i\pi} F^*(p) e^{np} dp. \quad (4.10)$$

Равенство (4.10) выражает формулу обращения для дискретного преобразования Лапласа.

Интеграл (4.10) вычисляется с помощью теории вычетов. Нахождение оригинала $f(n)$ упрощается, если от D -изображения $F^*(p)$ перейти к Z -изображению $F(z)$. В этом случае применимы способы вычисления $f(n)$, изложенные в параграфе 3.11. Символьное обращение Z -преобразования предусмотрено в программе Mathcad. Краткая таблица формул соответствия для дискретного преобразования Лапласа приведена в табл. Б.5 прил. Б.

Из формулы (4.10) следует свойство линейности для обратного преобразования:

$$D^{-1}[AF_1^*(p) + BF_2^*(p)] = AD^{-1}[F_1^*(p)] + BD^{-1}[F_2^*(p)],$$

где A и B – константы.

Пример 4.2. Найти оригинал для изображения $F^*(p) = \frac{e^p}{e^{4p} - 16}$.

Решение. Перейдем к Z -преобразованию, обозначив $z = e^p$. Получим $F(z) = \frac{z}{z^4 - 16}$. Правильную рациональную дробь $F_1(z) = \frac{1}{z^4 - 16}$ разложим на сумму простейших дробей. Так как нули z_k знаменателя все простые ($z_{1,2} = \pm 2$, $z_{3,4} = \pm 2i$), то дробь разлагается на сумму дробей первого типа:

$$F_1(z) = \frac{1}{z^4 - 16} = \frac{A_1}{z - 2} + \frac{A_2}{z + 2} + \frac{A_3}{z - 2i} + \frac{A_4}{z + 2i}.$$

Числа A_k – это вычеты функции $F_1(z)$ относительно полюсов z_k . Коэффициенты A_k находим по формуле

$$A_k = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4 - 16)} = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{4z^3}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{4z^3} = 2^{-5}, \\ A_2 &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{1}{4z^3} = -2^{-5}, \\ A_3 &= \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{1}{4z^3} = \frac{2^{-5}}{i^3} = i2^{-5}, \\ A_4 &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{1}{4z^3} = -\frac{2^{-5}}{i^3} = -i2^{-5}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F(z) = 2^{-5} \left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z+2} + \frac{iz}{z-2i} - \frac{iz}{z+2i} \right).$$

По свойству линейности (3.4) и формуле (3.3) находим оригинал $f(n)$:

$$f(n) = 2^{-5} (2^n - (-2)^n + i(2i)^n - i(-2i)^n) = 2^{-5} (2^n - (-2)^n + i2^n(i^n - (-i)^n)).$$

Разность сопряженных чисел i^n и $(-i)^n$ равна $2i \operatorname{Im} i^n$. Так как $i^n = e^{i \frac{\pi n}{2}} = \cos \frac{\pi n}{2} + i \sin \frac{\pi n}{2}$, то $2i \operatorname{Im} i^n = 2i \sin \frac{\pi n}{2}$. Значит,

$$f(n) = 2^{n-5} (1 - (-1)^n - 2 \sin \frac{\pi n}{2}).$$

4.3. Свойство линейности

Непосредственно из определения дискретного преобразования и свойств сходящихся рядов следует теорема линейности.

Теорема 4.2. Для любых чисел A_1 и A_2 и решетчатых функций $f_1(n)$ и $f_2(n)$ выполнено

$$D[A_1 f_1(n) + A_2 f_2(n)] = A_1 D[f_1(n)] + A_2 D[f_2(n)]. \quad (4.11)$$

Пример 4.3. Найти изображение для функции $f(n) = \cos \omega n$.

Решение. Так как $\cos \omega n = \frac{e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}}{2}$, то по свойству линейности

$$D[\cos \omega n] = \frac{1}{2} (D[e^{i\omega n}] + D[e^{-i\omega n}]).$$

Учитывая равенство (4.6) при $a = \pm i\omega$, запишем

$$D[\cos \omega n] = \frac{1}{2} \left(\frac{e^p}{e^p - e^{i\omega}} + \frac{e^p}{e^p - e^{-i\omega}} \right) = \frac{e^p}{2} \cdot \frac{2e^p - (e^{i\omega} + e^{-i\omega})}{e^{2p} - e^p(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + 1}.$$

Так как $e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2 \cos \omega$, то

$$D[\cos \omega n] = \frac{e^p(e^p - \cos \omega)}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1}. \quad (4.12)$$

4.4. Теорема затухания

Теорема 4.3. Если $D[f(n)] = F^*(p)$ и a – любое комплексное число, то

$$D[f(n)e^{an}] = F^*(p-a). \quad (4.13)$$

Доказательство. Действительно, по определению 4.1 имеем

$$D[f(n)e^{an}] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{an}e^{-pn} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-(p-a)n} = F^*(p-a).$$

Из этой теоремы и соответствия (4.12), например, получаем, что

$$D[e^{an} \cos \omega n] = \frac{e^p(e^p - e^a \cos \omega)}{e^{2p} - 2e^p e^a \cos \omega + e^{2a}}.$$

4.5. Теорема запаздывания

Теорема 4.4. Если k – натуральное число, то

$$D[f(n-k)] = e^{-kp} F^*(p). \quad (4.14)$$

Доказательство. По определению 4.1

$$D[f(n-k)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k)e^{-pn}. \quad (4.15)$$

Так как $f(n-k) = 0$ при $n < k$ по определению 3.1 функции-оригинала, то из формулы (4.15) имеем

$$D[f(n-k)] = \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k)e^{-pn}.$$

Обозначим $m = n - k$, $n = m + k$, тогда

$$D[f(n-k)] = \sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-p(m+k)} = e^{-pk} \sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-pm} = e^{-kp} F^*(p).$$

4.6. Теорема опережения

Теорема 4.5. Если k – натуральное число, то

$$D[f(n+k)] = e^{kp} \left[F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-pm} \right]. \quad (4.16)$$

Доказательство. Действительно, по определению D -преобразования

$$D[f(n+k)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k)e^{-pn}.$$

Пусть $m = n + k$, $n = m - k$, тогда

$$\begin{aligned} D[f(n+k)] &= \sum_{m=k}^{\infty} f(m)e^{-p(m-k)} = e^{pk} \sum_{m=k}^{\infty} f(m)e^{-pm} = \\ &= e^{kp} \left[\sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-pm} + \sum_{m=k}^{\infty} f(m)e^{-pm} - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-pm} \right] = \\ &= e^{kp} \left[F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-pm} \right]. \end{aligned}$$

4.7. Теорема дифференцирования изображения

Теорема 4.6. Если $D[f(n)] = F^*(p)$, то

$$\frac{dF^*(p)}{dp} = -D[nf(n)]. \quad (4.17)$$

Доказательство. Действительно, $F^*(p)$ – функция аналитическая, следовательно имеет производную любого порядка. Дифференцируя ряд (4.1), задающий $F^*(p)$, имеем

$$\frac{dF^*(p)}{dp} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-pn}(-n) = -D[nf(n)].$$

Пример 4.4. Найти $D[ne^{an}]$.

Решение. Применим теорему о дифференцировании изображения к равенству (4.6):

$$D[ne^{an}] = -\frac{d}{dp} \left(\frac{e^p}{e^p - e^a} \right) = -\frac{d}{dp} \left(\frac{e^p - e^a + e^a}{e^p - e^a} \right) = -\frac{d}{dp} \left(1 + \frac{e^a}{e^p - e^a} \right) = \frac{e^a e^p}{(e^p - e^a)^2}.$$

В частности, при $a=0$ имеем

$$D[n] = \frac{e^p}{(e^p - 1)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$D[n^2] = \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}.$$

4.8. Теорема интегрирования изображения

Теорема 4.7. Если $f(0)=0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \frac{f(n)}{n} \Big|_{n=0} = a$, то

$$D \left[\frac{f(n)}{n} \right] = a + \int_p^\infty F^*(p) dp. \quad (4.18)$$

Доказательство. Так как $f(0)=0$, то по определению D -преобразования запишем

$$F^*(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) e^{-pn}, \quad (4.19)$$

Ряд в правой части (4.19) сходится равномерно относительно p при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, поэтому его можно почленно интегрировать по p . Интегрируя обе части равенства (4.19) и учитывая, что $\int_p^\infty e^{-pn} dp = \frac{e^{-pn}}{n}$, получим

$$\int_p^\infty F^*(p) dp = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} e^{-pn}.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства число $a = \frac{f(n)}{n} \Big|_{n=0}$ и получим равенство (4.18):

$$a + \int_p^\infty F^*(p) dp = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} e^{-pn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n} e^{-pn} = D \left[\frac{f(n)}{n} \right].$$

Пример 4.5. Найти изображение функции $\frac{\sin \alpha n}{n}$.

Решение. Заметим, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha t}{t} = \frac{\sin \alpha n}{n} \Big|_{n=0} = \alpha$. Поскольку $D[\sin \alpha n] = \frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}$, то из формулы (4.18) следует, что

$$D \left[\frac{\sin \alpha n}{n} \right] = \alpha + \sin \alpha \int_p^\infty \frac{e^p dp}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1}.$$

Знаменатель подынтегральной функции перепишем в виде

$$e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1 = (e^p - \cos \alpha)^2 + 1 - \cos^2 \alpha = (e^p - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha.$$

Введем новую переменную интегрирования $v = e^p - \cos \alpha$, $dv = e^p dp$, тогда

$$\sin \alpha \int \frac{e^p dp}{e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1} = \sin \alpha \int \frac{dv}{v^2 + \sin^2 \alpha} = \operatorname{arctg} \frac{v}{\sin \alpha} = \operatorname{arctg} \frac{e^p - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\sin \alpha n}{n} \right] &= \alpha + \operatorname{arctg} \frac{e^p - \cos \alpha}{\sin \alpha} \Big|_p^\infty = \\ &= \alpha + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{e^p - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \alpha + \operatorname{arctg} \frac{e^p - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

4.9. D -преобразование разности решетчатой функции

Определение разности решетчатой функции дано в параграфе 3.13.

Теорема 4.8. Если $D[f(n)] = F^*(p)$, то

$$D[\Delta f(n)] = (e^p - 1)F^*(p) - e^p f(0). \quad (4.20)$$

Доказательство. Поскольку $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$, то равенство (4.20) следует из теоремы опережения 4.5 и свойства линейности (4.11) для D -преобразования.

Так как $\Delta^2 f(n) = \Delta(\Delta f(n))$, то

$$D[\Delta^2 f(n)] = (e^p - 1)D[\Delta f(n)] - e^p \Delta f(0). \quad (4.21)$$

Подставив в равенство (4.21) $D[\Delta f(n)]$, получим

$$D[\Delta^2 f(n)] = (e^p - 1)^2 F^*(p) - e^p (e^p - 1) f(0) - e^p \Delta f(0). \quad (4.22)$$

Применив формулу (4.22) к изображению (4.20), найдем $D[\Delta^3 f(n)]$ и т. д.

Отметим, что соотношение (4.20) получается из равенства (3.48), если в нем положить $z = e^p$.

4.10. D -преобразование суммы решетчатой функции

Теорема 4.9. Если $D[f(n)] = F^*(p)$, то

$$D \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \right] = \frac{F^*(p)}{e^p - 1}. \quad (4.23)$$

Доказательство. Обозначим $g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, $g(0) = 0$. Так как $\Delta g(n) = g(n+1) - g(n)$, то $\Delta g(n) = f(n)$, поэтому $D[\Delta g(n)] = D[f(n)] = F^*(p)$. По теореме 4.8 о D -преобразовании разности решетчатой функции $D[\Delta g(n)] = (e^p - 1)D[g(n)]$. Из двух последних равенств и следует утверждение теоремы.

Соотношение (4.23) получается из теоремы 3.10 для Z -преобразования, если принять в формуле (3.52) $z = e^p$.

4.11. Теорема умножения изображений

Найдем изображение свертки решетчатых функций, которая задается выражением (3.37).

Теорема 4.10. Если $D[f(n)] = F^*(p)$, $D[g(n)] = G^*(p)$, то

$$D[f(n) * g(n)] = D \left[\sum_{k=0}^n f(n-k)g(k) \right] = F^*(p)G^*(p). \quad (4.24)$$

Доказательство. Для доказательства все члены равенства $G^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-pk}$ умножаем на $F^*(p)$:

$$F^*(p)G^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-pk}F^*(p). \quad (4.25)$$

По теореме запаздывания (4.14)

$$e^{-kp}F^*(p) = D[f(n-k)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k)e^{-pn}. \quad (4.26)$$

Из выражений (4.25) и (4.26) следует, что

$$F^*(p)G^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \sum_{n=0}^{\infty} f(n-k)e^{-pn}. \quad (4.27)$$

Изменим порядок суммирования в правой части (4.27):

$$F^*(p)G^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k)f(n-k) \right) e^{-pn}. \quad (4.28)$$

Так как $f(n-k) = 0$ при $k > n$, то из формулы (4.28), следует

$$F^*(p)G^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k)f(n-k) \right) e^{-pn} = D[f(n) * g(n)].$$

4.12. Теорема умножения оригиналов

Теорема 4.11. Если решетчатые функции $f(n)$ и $g(n)$ являются оригиналами, то выполняется равенство

$$D[f(n)g(n)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi} F^*(s)G^*(p-s)ds, \quad (4.29)$$

где $D[f(n)] = F^*(p)$ и $D[g(n)] = G^*(p)$. При этом $\operatorname{Re} p - s_2 > \gamma > s_1$, где s_1, s_2 – показатели роста функций $f(n)$ и $g(n)$ соответственно.

Доказательство. Функции оригиналы $f(n)$ и $g(n)$ по определению 3.1 удовлетворяют неравенствам $|f(n)| < M_1 e^{s_1 n}$, $|g(n)| < M_2 e^{s_2 n}$. Поэтому $|f(n)g(n)| < M_1 M_2 e^{(s_1+s_2)n}$. Это значит, что произведение $f(n)g(n)$ тоже является функцией-оригиналом с показателем роста $s_1 + s_2$.

По определению D -преобразования (4.1)

$$D[f(n)g(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)g(n)e^{-pn}.$$

Подставим $f(n)$ из формулы обращения (4.10):

$$D[f(n)g(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} g(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi} F^*(s) e^{ns} ds. \quad (4.30)$$

Меняя в формуле (4.30) порядок суммирования и интегрирования, получим формулу (4.29)

$$D[f(n)g(n)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi} F^*(s) \sum_{n=0}^{\infty} g(n) e^{-(p-n)s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi} F^*(s) G^*(p-s) ds.$$

Изменение порядка суммирования и интегрирования законно, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} g(n)g(n)e^{-(p-s)n}$ сходится равномерно относительно $p-s$. Для этого должно выполняться неравенство $\operatorname{Re}(p-s) > s_2$ или $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} p - s_2$. Так как $\operatorname{Re} s > \gamma > s_1$, то из этого следует неравенство $\operatorname{Re} p - s_2 > \gamma > s_1$, присутствующее в формулировке теоремы.

4.13. Предельные соотношения для D -преобразования

Установим связь между значениями решетчатой функции-оригинала и её изображения $F^*(p)$ в нуле и на бесконечности.

Теорема 4.12. Если $p \rightarrow \infty$ так, что $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F^*(p) = f(0). \quad (4.31)$$

Доказательство. Запишем равномерно сходящийся ряд (4.1), задающий $F^*(p)$, и перейдем к пределу при $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F^*(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-pn} = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \lim_{p \rightarrow \infty} e^{-pn} = f(0), \quad (4.32)$$

так как $\lim_{p \rightarrow \infty} e^{-pn} = 0$.

Перенесем $f(0)$ в левую часть формулы (4.1) и умножим обе части полученного равенства на e^p , затем перейдем к пределу при $p \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$, тогда

$$f(1) = \lim_{p \rightarrow \infty} e^p(F^*(p) - f(0)). \quad (4.33)$$

Аналогично находим

$$f(2) = \lim_{p \rightarrow \infty} (e^{2p}(F^*(p) - f(0)) - e^p f(1)). \quad (4.34)$$

Теорема 4.13. Если $D[f(n)] = F^*(p)$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = f(\infty)$, то

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (e^p - 1)F^*(p). \quad (4.35)$$

Доказательство. По теореме 4.8 о D -преобразовании разности решетчатой функции запишем

$$D[\Delta f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]e^{-pn} = (e^p - 1)F^*(p) - f(0). \quad (4.36)$$

При $p=0$ сумма ряда в правой части

$$\sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = f(\infty) - f(0). \quad (4.37)$$

Переходя к пределу в формуле (4.36) при $p \rightarrow 0$, с учетом формулы (4.37), приходим к равенству (4.35):

$$\lim_{p \rightarrow 0} (e^p - 1)F(p) - f(0) = f(\infty) - f(0).$$

4.14. Решение разностных уравнений с помощью дискретного преобразования Лапласа

Пусть дано разностное уравнение k -го порядка с постоянными коэффициентами

$$f(n+k) + c_1 f(n+k-1) + c_2 f(n+k-2) + \dots + c_k f(n) = g(n), \quad (4.38)$$

где $g(n)$ – заданная функция-оригинал. Пусть известны значения $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(k-1)$. Обозначим $D[f(n)] = F^*(p)$, $D[g(n)] = G^*(p)$.

Применим D -преобразование ко всем членам уравнения (4.38) и с помощью теоремы 4.5 (опережения) получим алгебраическое уравнение первой степени для $F^*(p)$. Далее, используя таблицы, формулу обращения (4.10) и переходя к обратному D -преобразованию, находим искомую функцию-оригинал.

Пример 4.6. Найти общий член последовательности $x(n)$ чисел Фибоначчи¹: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Решение. В этой последовательности каждый последующий член равен сумме двух предыдущих, т. е.

$$x(n+2) = x(n) + x(n+1).$$

Решив это разностное уравнение второго порядка с начальными условиями $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, найдем искомую функцию $x(n)$.

Пусть $D[x(n)] = X^*(p)$, тогда по теореме 4.5 (опережения)

$$\begin{aligned} D[x(n+1)] &= e^p X^*(p), \\ D[x(n+2)] &= e^{2p} X^*(p) - e^p. \end{aligned}$$

¹Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1180–1240) – итальянский математик.

Применяя D -преобразование к обеим частям уравнения, получим

$$X^*(p)(e^{2p} - e^p - 1) = e^p.$$

Отсюда

$$X^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - e^p - 1}.$$

Обозначим $z = e^p$, тогда

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{z}{z - z_1} - \frac{z}{z - z_2} \right),$$

где $z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ – корни уравнения $z^2 - z - 1 = 0$. Отсюда

$$X^*(p) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{e^p}{e^p - z_1} - \frac{e^p}{e^p - z_2} \right).$$

Переходя к оригиналам, по формуле (4.6) найдем $x(n)$:

$$x(n) = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} [(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n].$$

В качестве упражнения читателю предлагается сделать проверку полученного решения самостоятельно.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Упражнения

1. Дать определение D -преобразования решетчатой функции $f(n)$.
2. Доказать, что функция от p $F^*(p) = D[f(n)]$ является аналитической.
3. Найти дискретное преобразование Лапласа для функции Хэвисайда $h(n)$ по определению.
4. Пользуясь свойствами линейности, найти изображение решетчатой функции-оригинала $f(n) = \text{ch}^2 n$.
5. Сформулировать теорему затухания и найти $D[h(n-3)]$.
6. Если $D[f(n)] = F^*(p)$, то какое изображение имеет функция $f(n-k)$, где k – натуральное число?
7. Доказать теорему запаздывания.
8. Если $D[f(n)] = F^*(p)$, то чему равно $D[f(n+3)]$?
9. Доказать теорему опережения.

10. Если $D[f(n)] = F^*(p)$, то какие оригиналы соответствуют изображениям $\frac{dF^*}{dp}$, $\frac{d^2F^*}{dp^2}$?
11. Доказать теорему интегрирования изображения.
12. Доказать теорему о разности решетчатой функции и, пользуясь ею, найти $D[\Delta^2 n^3]$.
13. Используя теорему о D -изображении суммы решетчатой функции, найти сумму $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k^3$.
14. Сформулировать теорему умножения изображений.
15. С помощью теоремы умножения изображений найти оригинал для изображения $F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{2p} - 1}$.
16. Найти $f(2)$, если $D[f(n)] = \frac{e^{2p}}{e^{2p} + 1}$, используя предельные соотношения для D -преобразования.

Задачи

1. Пользуясь определением и свойствами D -преобразования, найти изображения следующих функций:

- 1.1. а) $f(n) = e^{-n} \sin 2n$; б) $f(n) = ne^{5n}$; в) $f(n) = \frac{a^n - 1}{n}$.
- 1.2. а) $f(n) = e^{2n} \operatorname{sh} 3n$; б) $f(n) = n \sin \alpha n$; в) $f(n) = \frac{n - \operatorname{sh} n}{n}$.
- 1.3. а) $f(n) = e^{5n} \operatorname{ch} 2n$; б) $f(n) = n^2 + 5n$; в) $f(n) = \frac{\sin \alpha n}{n}$, $\alpha \neq 0$.
- 1.4. а) $f(n) = e^{-3n} \cos n$; б) $f(n) = n \operatorname{ch} 2n$; в) $f(n) = \frac{1 - \cos \alpha n}{n}$.
- 1.5. а) $f(n) = e^{-2n} \operatorname{sh} n$; б) $f(n) = n^2 e^{3n}$; в) $f(n) = \frac{3^n - 1}{n}$.
- 1.6. а) $f(n) = e^{3n} \sin 5n$; б) $f(n) = 2n \operatorname{sh} 3n$; в) $f(n) = \frac{\operatorname{ch} \alpha n - \operatorname{ch} n}{n}$.
- 1.7. а) $f(n) = e^{5n} \sin 2n$; б) $f(n) = 3n \cos n$; в) $f(n) = \frac{e^{\alpha n} - e^n}{n}$.
- 1.8. а) $f(n) = e^n \cos 2n$; б) $f(n) = n \operatorname{sh} 5n$; в) $f(n) = \frac{2^{\alpha n} - 2^n}{n}$.
- 1.9. а) $f(n) = e^{-n} \operatorname{sh} 3n$; б) $f(n) = n^2 e^{-2n}$; в) $f(n) = \frac{5^n - 1}{n}$.
- 1.10. а) $f(n) = e^{3n} \cos 2n$; б) $f(n) = 3n \sin n$; в) $f(n) = \frac{3^{\alpha n} - 9^n}{n}$.
- 1.11. а) $f(n) = e^{-2n} \cos 3n$; б) $f(n) = n \sin^2 n$; в) $f(n) = \frac{e^{\alpha n} - e^{2n}}{n}$.

- 1.12. а) $f(n) = e^n \sin 4n$; б) $f(n) = n \cdot 3^n$; в) $f(n) = \frac{4^n - 1}{n}$.
- 1.13. а) $f(n) = e^{4n} \operatorname{ch} 3n$; б) $f(n) = n^2 \cdot 5^n$; в) $f(n) = \frac{\cos \alpha n - \cos 3n}{n}$.
- 1.14. а) $f(n) = e^{-n} \cos 3n$; б) $f(n) = 3n \operatorname{sh} 2n$; в) $f(n) = \frac{2^n - 1}{n}$.
- 1.15. а) $f(n) = e^n \operatorname{ch} 2n$; б) $f(n) = n^2 e^{-3n}$; в) $f(n) = \frac{e^{\alpha n} - e^{3n}}{n}$.
- 1.16. а) $f(n) = e^{2n} \sin 3n$; б) $f(n) = n \sin \pi n/2$; в) $f(n) = \frac{\operatorname{ch} \alpha n - \operatorname{ch} 2n}{n}$.
- 1.17. а) $f(n) = e^{-3n} \operatorname{sh} 2n$; б) $f(n) = n \cos \pi n$; в) $f(n) = \frac{3^{\alpha n} - 3^n}{n}$.
- 1.18. а) $f(n) = e^{3n} \operatorname{ch} 5n$; б) $f(n) = (n+3) \operatorname{sh} 2n$; в) $f(n) = \frac{n - \sin n}{n}$.
- 1.19. а) $f(n) = e^n \operatorname{sh} 3n$; б) $f(n) = 2n \cos \pi n/3$; в) $f(n) = \frac{e^{\alpha n} - e^{5n}}{n}$.
- 1.20. а) $f(n) = e^{2n} \operatorname{ch} n$; б) $f(n) = (3n+2) \operatorname{ch} 2n$; в) $f(n) = \frac{1 - \cos 2n}{n}$.
- 1.21. а) $f(n) = e^{2n} \operatorname{sh} 3n$; б) $f(n) = n \sin \alpha n$; в) $f(n) = \frac{5^{\alpha n} - 5^n}{n}$.
- 1.22. а) $f(n) = e^{3n} \operatorname{sh} 2n$; б) $f(n) = 2n \sin \pi n/6$; в) $f(n) = \frac{\operatorname{ch} \alpha n - \operatorname{ch} 3n}{n}$.
- 1.23. а) $f(n) = e^{-3n} \operatorname{ch} 2n$; б) $f(n) = n e^{2n}$; в) $f(n) = \frac{5^{\alpha n} - 25^n}{n}$.
- 1.24. а) $f(n) = 2^{2n} \cos 5n$; б) $f(n) = (2n+3) \operatorname{ch} n$; в) $f(n) = \frac{2^n - 2^{\alpha n}}{n}$.
- 1.25. а) $f(n) = e^{-2n} \sin 3n$; б) $f(n) = n^2 2^n$; в) $f(n) = \frac{\sin 2n}{n}$.
- 1.26. а) $f(n) = e^{5n} \operatorname{sh} n$; б) $f(n) = n \cdot 5^n$; в) $f(n) = \frac{\cos \alpha n - \cos 5n}{n}$.
- 1.27. а) $f(n) = e^{4n} \cos 2n$; б) $f(n) = 2n^2 - 3n$; в) $f(n) = \frac{2^n - 4^{\alpha n}}{n}$.
- 1.28. а) $f(n) = e^{-3n} \sin 5n$; б) $f(n) = 3n \cos \pi n/2$; в) $f(n) = \frac{\operatorname{ch} \alpha n - \operatorname{ch} 5n}{n}$.
- 1.29. а) $f(n) = e^{-5n} \operatorname{sh} n$; б) $f(n) = (n+2) \operatorname{sh} 3n$; в) $f(n) = \frac{\cos \alpha n - \cos n}{n}$.
- 1.30. а) $f(n) = e^{4n} \sin 3n$; б) $f(n) = 2n \sin \pi n/3$; в) $f(n) = \frac{4^n - 16^n}{n}$.

2. Найти оригиналы по заданным изображениям:

2.1. а) $F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p - 1)(e^p - e)}$. б) $F^*(p) = \frac{e^p}{e^{4p} - 1}$.

$$2.2. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)^2(e^p - e)}.$$

$$2.3. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p - e^2)(e^p - 1)}.$$

$$2.4. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p - 1)^4}.$$

$$2.5. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^{-p}}{(1 - e^{-p})^2} \cdot \frac{e^p}{e^p - 1}.$$

$$2.6. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)(e^p - 4)(e^p - 5)}.$$

$$2.7. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 7e^p + 10}.$$

$$2.8. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 6e^p + 5}.$$

$$2.9. \text{ a) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p - 3)(e^p - 4)}.$$

$$2.10. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)^2(e^p - 2)}.$$

$$2.11. \text{ a) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p + 2)(e^{2p} - 9)}.$$

$$2.12. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 3e^p + 2}.$$

$$2.13. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)(e^p - 2)(e^p - 3)}.$$

$$2.14. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{2p} - 1}.$$

$$2.15. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - e^{-1})(e^p - e)}.$$

$$2.16. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - a)^2(e^p - b)}.$$

$$2.17. \text{ a) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p + 2)(e^{2p} - 1)}.$$

$$2.18. \text{ a) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p + 1)(e^{2p} - 4)}.$$

$$2.19. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)(e^{2p} - 3e^p + 2)}.$$

$$2.20. \text{ a) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p + 1)(e^{2p} - 1)}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{4p} - 81}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{3p} - 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{3p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{3p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^{2p} + 1)^2}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} + a^2}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{2p} - 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} + 2ae^p + 2a^2}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} - 2e^p}{e^{2p} - 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{3p} - 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{ae^p + b}{e^{2p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} - 2e^p}{e^{2p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - a)(e^p - b)}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} + 5e^p}{e^{2p} - 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} - e^p}{e^{3p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^{2p} + 1)(e^{2p} - 2)}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^{2p} + 1)(e^p + 3)}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} + 2e^p}{e^{2p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^{2p} - 2)(e^{2p} - 1)}.$$

$$2.21. \text{ а) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(e^p - 1)^3}.$$

$$2.22. \text{ а) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 6e^p + 8}.$$

$$2.23. \text{ а) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)(e^p - 2)^2}.$$

$$2.24. \text{ а) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p + 3)(e^{2p} - 9)}.$$

$$2.25. \text{ а) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 5e^p + 6}.$$

$$2.26. \text{ а) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p - 2)(e^{2p} - 6e^p + 8)}.$$

$$2.27. \text{ а) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 2)^3}.$$

$$2.28. \text{ а) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p + 1)^4}.$$

$$2.29. \text{ а) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p + 3)^3}.$$

$$2.30. \text{ а) } F^*(p) = \frac{1}{(e^p - 2)(e^{2p} - 5e^p + 6)}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} - 2e^p}{e^{3p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{3p} + 8}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} + 3e^p}{e^{3p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p} - 2e^p}{(e^{2p} - e^p + 1)^2}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{(e^{2p} - 9)(e^p + 1)}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{3e^{2p} - 2e^p}{e^{2p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^p}{e^{3p} - 8}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{3p} + 8}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{2e^{2p} - 3e^p}{e^{2p} + 1}.$$

$$\text{б) } F^*(p) = \frac{2e^{2p} - e^p}{e^{3p} - 8}.$$


3. Решить линейное разностное уравнение задачи 3 из главы 3, используя D -преобразование.

4. Решить линейную разностную систему задачи 4 из главы 3, используя D -преобразование.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ MATHCAD



5.1. Краткие сведения об использовании программы Mathcad

Mathcad – это программное средство, позволяющее производить разнообразные математические и технические расчеты. Для этого пользователю предоставляются инструменты для работы с формулами, числами, графиками и текстами. Графический интерфейс пакета легко осваивается пользователями.

Окно Mathcad – это пространство, в котором размещены все инструменты, необходимые для работы, и рабочий документ, т. е. место, куда будут вводиться выражения для вычислений, команды и где будут отображаться результаты вычислений и строиться графики. Самая верхняя строка окна – это строка стандартных Windows-приложений. Все, что расположено ниже, относится к работе в среде пакета. Вторая сверху строка – строка меню, содержащая пункты: "Файл", "Правка", "Вид", "Добавить", "Формат", "Инструменты", "Символика", "Окно", "Справка". Следующие строки окна содержат панели инструментов. Например, кнопка  открывает список встроенных функций.

Панель математических операций содержит девять кнопок, каждая из которых открывает дополнительную панель наиболее часто используемых математических действий (рис. 5.1).

Под строками панелей инструментов находится окно рабочего документа Mathcad (рис. 5.2). Щелчок мышью по любому месту в рабочем документе обозначает крестиком позицию, с которой начинается ввод вычисляемого выражения. Для вычисления определенного интеграла нужно щелкнуть на панели инструментов по кнопке  ("Панель вычисления"), затем по значку  во всплывающем окошке "Исчисление". Появится шаблон, в который необходимо ввести пределы интегрирования, подынтегральную функцию и переменную интегрирования, потом выделить синим уголком всё выражение. Затем следует щелкнуть по кнопке "Панель символьных ключевых слов"  – появится панель "Символьная", где нужно выбрать кнопку  (рис. 5.1). Далее нужно щелкнуть по рабочему документу вне выделенной рамки. Справа от стрелки появится результат вычисления.

Для вычисления модуля комплексного числа следует на панели "Калькулятор"  щелкнуть по значку  и ввести комплексное число,

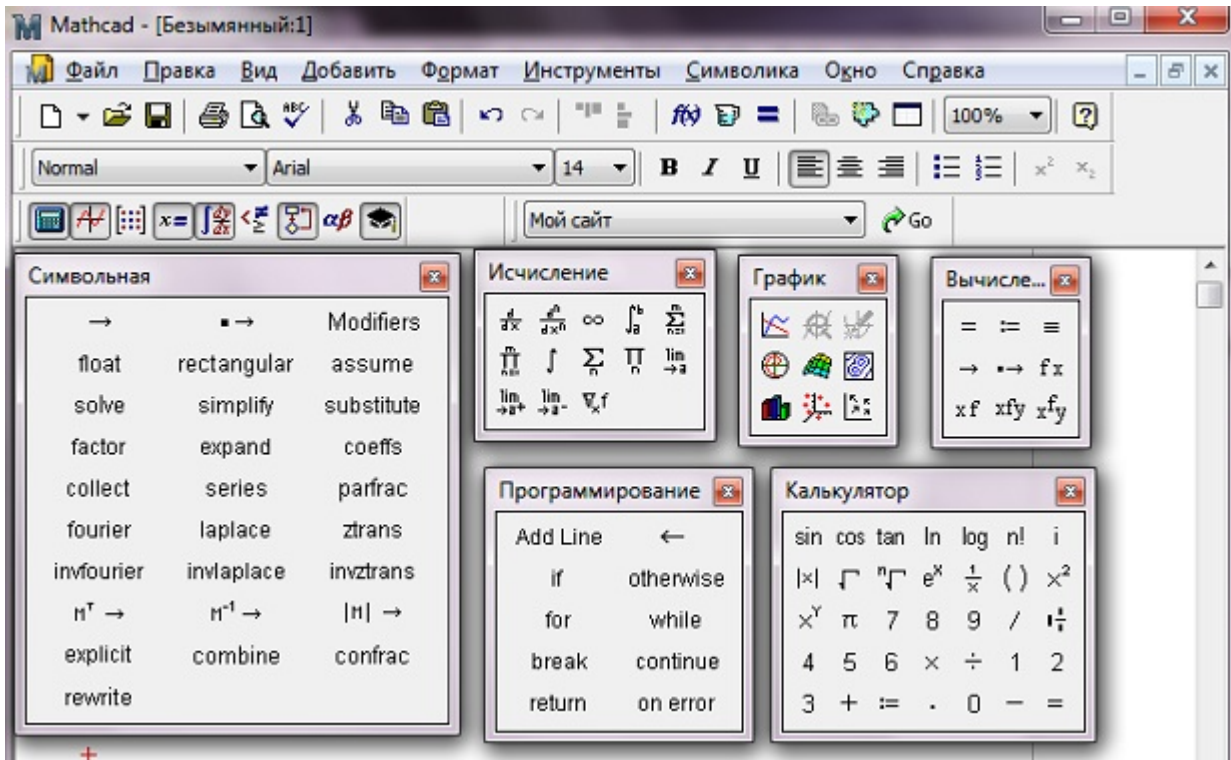


Рис. 5.1

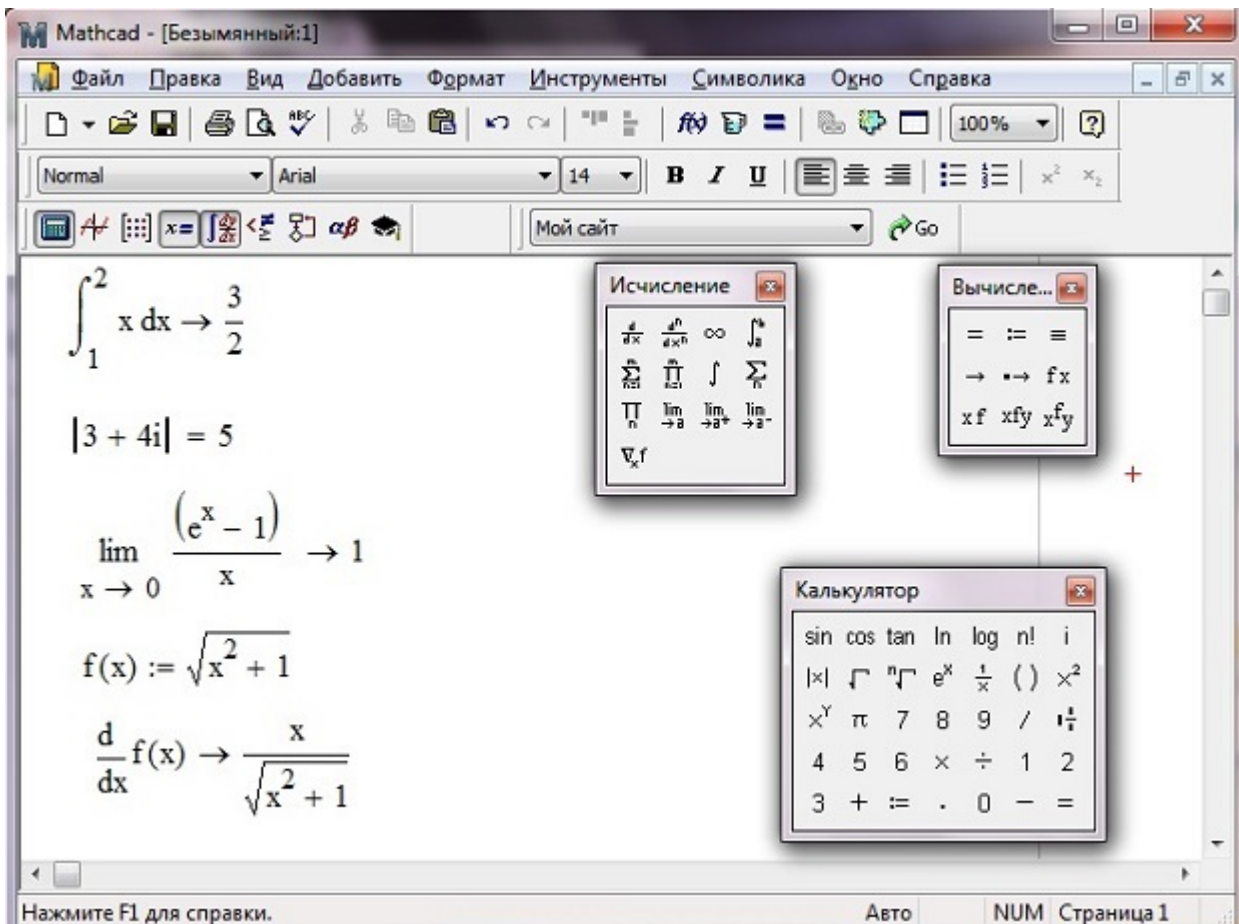


Рис. 5.2

причем для ввода мнимой единицы необходимо воспользоваться значком i на той же панели и поставить знак равенства. Чтобы вычислить предел функции, щелкаем на панели "Исчисление" по значку $\lim_{x \rightarrow a}$, вводим данные и применяем символьное вычисление \rightarrow . Вычислить производную поможет кнопка $\frac{d}{dx}$ на панели "Исчисление". Предварительно определяем функцию, производную которой будем вычислять.

5.2. Спектральный анализ функций в программе Mathcad

Работу программы Mathcad рассмотрим на следующем примере.

Пример 5.1. Разложить в комплексный ряд Фурье периодическую функцию, заданную графически (рис. 5.3). Найти амплитудный и фазовый спектры, построить их графики.

Решение. Период функции $2l = 2$, $l = 1$. Интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от расположения этого отрезка на числовой оси, поэтому опишем функцию $f(t)$ аналитически на промежутке $[-1; 1)$:

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0, \\ 1, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

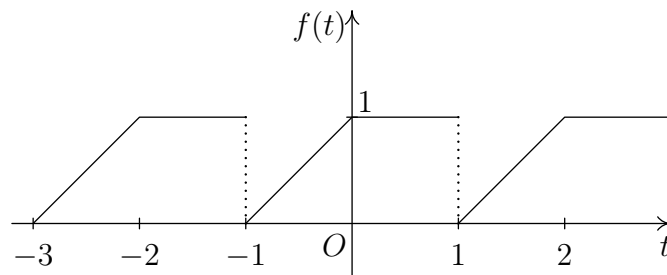


Рис. 5.3

Найдем спектральную функцию $F(n)$ по формуле (1.52). Поскольку $f(t)$ задана двумя выражениями, отрезок интегрирования при вычислении $F(n)$ разбиваем на два. Набираем интегралы, щелкнув по значку \int_a^b в окошке "Исчисление" и e^x на панели "Калькулятор". Выделяем выражение уголком справа, щелкаем по кнопке rectangular (представить комплексное число в алгебраической форме) на панели символьных ключевых слов. Затем щелкаем вне выделенной рамки.

Выражение для $F(n)$ можно преобразовать, учитывая, что $\sin \pi n = 0$, $\cos \pi n = (-1)^n$. Выделяем выражение $F(n)$ и щелкаем два ра-

за по кнопке "substitute" на панели "Символьная". В местозаполнители, стоящие слева вводим $\cos \pi n$ и $\sin \pi n$, а в местозаполнители, стоящие справа, – их значения.

При $n=0$ выражение в правой части не определено, хотя $F(0)$ существует. Действительно, из формулы (1.52) следует, что значение $F(0)$ равно площади фигуры, построенной на отрезке $[-1, 1]$ (рис. 5.3). Поэтому, щелкнув в окошке "Исчисление" по кнопке $\lim_{n \rightarrow 0}$, находим $\lim_{n \rightarrow 0} F(n) \rightarrow \frac{3}{2}$ (листинг 1).

$$\begin{aligned}
 F(n) &= \left[\int_{-1}^0 (t+1)e^{-i\pi n t} dt + \int_0^1 e^{-i\pi n t} dt \right] \\
 F(n) \text{ rectangular} &\rightarrow \frac{\pi \cdot n \cdot \sin(\pi \cdot n) - \cos(\pi \cdot n) + 1}{\pi^2 \cdot n^2} - \frac{\sin(\pi \cdot n) - \pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n)}{\pi^2 \cdot n^2} \cdot i \\
 F(n) &= \frac{\pi \cdot n \cdot \sin(\pi \cdot n) - \cos(\pi \cdot n) + 1}{\pi^2 \cdot n^2} - \frac{\sin(\pi \cdot n) - \pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n)}{\pi^2 \cdot n^2} \cdot i \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } \sin(\pi \cdot n) = 0 \\ \text{substitute, } \cos(\pi \cdot n) = (-1)^n \end{array} \right. \rightarrow \frac{1 - (-1)^n + \pi \cdot (-1)^n \cdot n \cdot i}{\pi^2 \cdot n^2} \\
 \lim_{n \rightarrow 0} F(n) &\rightarrow \frac{3}{2} +
 \end{aligned}$$

Листинг 1

Из этого полученного выражения $F(n)$ следует, что если $n=2k$ – четное число, то $(-1)^{2k}=1$. Значит, $F(2k) = \frac{i}{2\pi k}$ – чисто мнимая величина и фазовый спектр $\Phi(2k) = -\frac{\pi}{2}$ при $k > 0$.

Так как $F(0) = \frac{3}{2}$, то $\Phi(0) = -\arg \frac{3}{2} = 0$. Амплитудный спектр $S(2k) = |F(2k)| = \frac{1}{2\pi k}$ при $k > 0$. Коэффициенты C_n комплексного ряда Фурье связаны со спектральной функцией формулой (1.52), поэтому $C_n = \frac{1}{2}F(n)$, $C_0 = \frac{1}{2}F(0) = \frac{3}{4}$, так как $2l=2$.

Учитывая выражение для $F(n)$, запишем комплексный ряд Фурье для $f(t)$:

$$f(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n + i\pi n (-1)^n}{n^2} e^{i\pi n t}, \quad n \neq 0.$$

Здесь при вычислении суммы исключается слагаемое, соответствующее номеру $n=0$.

Амплитудный спектр

$$S(n) = |F(n)| = \frac{1}{\pi^2 n^2} \sqrt{(1 - (-1)^n)^2 + (\pi n)^2} = \frac{1}{\pi^2 n^2} \sqrt{2(1 - (-1)^n) + (\pi n)^2},$$

$n \neq 0$, и $S(0) = \frac{3}{2}$.



Зададим выражения для вычисления $S(n)$ и $\Phi(n)$ (листинг 2). Набираем $S(n) :=$ и щелкаем по кнопке Add Line на панели "Программирование". В верхнюю позицию вносим $|F(n)|$, затем, щелкнув на той же панели по кнопке if, набираем $n \neq 0$, используя панель "Логический". В нижнюю позицию заносим $3/2$ if $n = 0$. Аналогично определяем $\Phi(n)$, учитывая, что $\Phi(0) = 0$.

The screenshot shows a software interface with two panels on the right and mathematical definitions on the left. The top panel, titled "Программирование", contains buttons for "Add Line", "if", "for", "break", "return", "otherwise", "while", "continue", and "on error". The bottom panel, titled "Логический", contains logical symbols: "=", "<", ">", "≤", "≥", "≠", "¬", "∧", "∨", and "⊕". On the left, the following definitions are shown:

$$s(n) := \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi^2 \cdot n^2 - 2 \cdot (-1)^n + 2}}{\pi^2 \cdot n^2} & \text{if } n \neq 0 \\ \frac{3}{2} & \text{if } n = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(n) := \begin{cases} \left[-\arg \left[\frac{1 - (-1)^n + \pi \cdot (-1)^n \cdot n \cdot i}{\pi^2 \cdot n^2} \right] \right] & \text{if } n \neq 0 \\ 0 & \text{if } n = 0 \end{cases}$$

Листинг 2

Зададим диапазон изменения n с шагом 1, $n := -10, -9..10$. Для построения графиков щелкаем на панели "Графики"  по кнопке "Двумерный график" . Теперь в позицию, отмеченную по середине оси абсцисс, введем имя аргумента n , а возле оси ординат – имя функции $S(n)$. График появится после щелчка вне поля графика.

Чтобы увеличить или сместить график, нужно щелкнуть левой кнопкой по области графика – появится черная рамка вокруг графика. Подведем курсор к черному квадратику (маркеру) в правом нижнем углу. Когда указатель мыши превратится в двустороннюю стрелку, нажав и удерживая левую кнопку мыши, изменим размер графика. Подведем курсор мыши к любой части рамки (кроме маркеров) – появится всплывающий знак "черная ладонь". Нажав и удерживая левую кнопку мыши, переместим график в нужное место. Для изменения толщины, цвета и типа линий графика служит окно форматирования, которое появится, если два раза быстро щелкнуть по области графика (рис. 5.4). Окно форматирования имеет пять вкладок:

"Оси X–Y" – задание параметров форматирования осей;

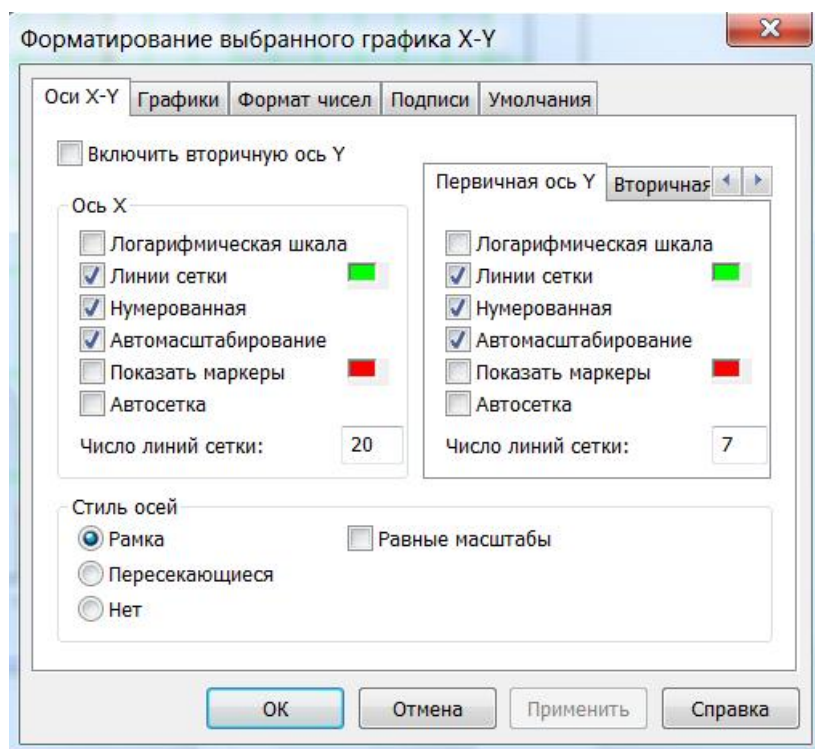


Рис. 5.4

”Графики” – задание параметров форматирования линий графика;
 ”Формат чисел” – задание параметров форматирования чисел;
 ”Подписи” – задание параметров форматирования меток (надписей) осей;

”Умолчания” – назначение параметров форматирования параметрами по умолчанию.

На вкладке ”Оси X–Y” содержатся соответствующие параметры:

”Логарифмическая шкала” – установка логарифмического масштаба;

”Линии сетки” – установка масштабной сетки;

”Нумерованная” – установка цифровых данных по осям;

”Автомасштабирование” – автоматическое масштабирование графика;

”Показать маркеры” – установка делений по осям;

”Автосетка” – автоматическая установка масштабных линий;

”Число линий сетки” – установка числа масштабных линий.

Группа ”Стиль осей” задает стиль координатных осей:

”Рамка” – оси в виде прямоугольника;

”Пересекающиеся” – оси в виде креста;

”Нет” – без осей.

Вкладка ”Графики” позволяет управлять видом линий, отобража-

ющих график. В этой вкладке представлены параметры в столбцах:

”Метка легенды” – выбор типа линии в легенде;

”Символ частота” – шаг при расчете значений;

Symbol – выбор символа, который помещается на линию для отметки базовых точек графика;

”Символ вес” – величина символа;

”Линия” – установка типа линии;

”Линия вес” – установка толщины линии;

”Цвет” – цвет линий графика;

”Тип” – установка типа графика;

”Ось Y” – обозначение оси ординат.

В столбце ”Тип” можно выбрать различные типы линий графика:

”Линия” – сплошная линия, ”Основа” – вертикальные линии.

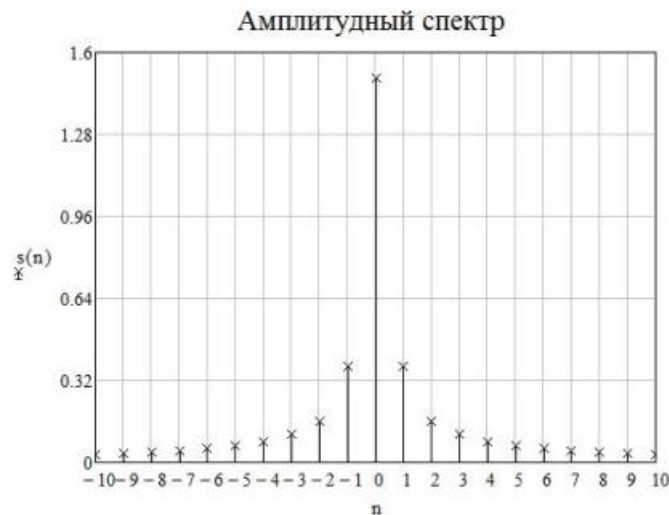


Рис. 5.5

Амплитудный спектр $S(n)$ – функция дискретной переменной n . Его график должен быть дискретной системой точек, а не сплошной линией. Во вкладке ”Графики” окна форматирования в столбце ”Тип” щелкаем по первой строчке ”Линия” – справа появится стрелка. Щелкаем по ней и выбираем строку ”Основа”. Затем щелкаем по кнопке ”Применить” – на графике появятся вертикальные линии. В столбце Symbol, щелкнув по первой строке, выбираем символ \times . Щелкаем по кнопке ”Применить” и на графике значения $S(n)$ отразятся точками в центрах крестиков. Для удобства пользования графиком нанесем на него масштабную сетку. Для этого в окне форматирования выбираем вкладку ”Оси X–Y”, в столбце ”Ось X” ставим галочки напротив ”Линии сетки”, ”Нумерованная”, ”Автомасштабирование” и в окошке ”Число линий сетки” набираем число 20 (по числу отрезков, на которые разбит отрезок

$[-10; 10]$). Выбираем переключатель "Рамка" и щелкаем по кнопке "Применить". Аналогичные действия производим в столбце "Ось Y", выбирая число линий сетки 7.

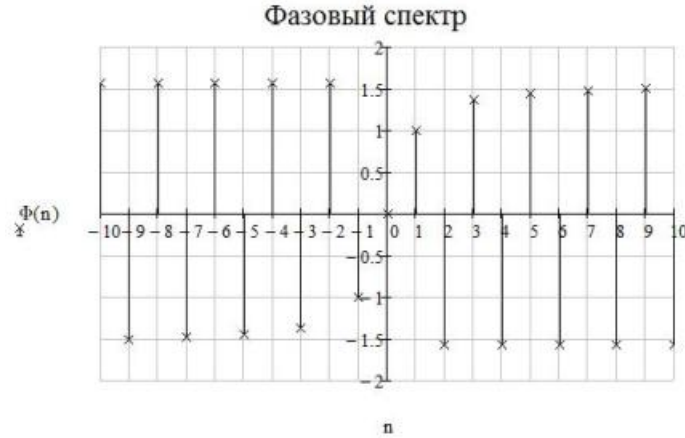


Рис. 5.6

График фазового спектра строят аналогично рис. 5.6. Различие состоит только в том, что оси координат лучше выбрать в виде креста, воспользовавшись переключателем "Пересекающиеся".

Пример 5.2. Найти спектральную функцию сигнала, представленного на рис. 5.7. Найти амплитудный и фазовый спектры, автокорреляционную функцию. Построить их графики.

Решение. Определим функцию $f(t)$ аналитически:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 3, \\ 4 - t, & 3 \leq t \leq 4, \\ 0, & t < 0, \quad t > 4. \end{cases}$$

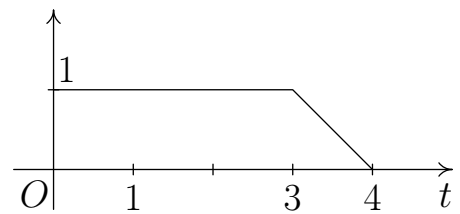


Рис. 5.7

Вычислим спектральную функцию $F(\omega)$ по формуле (1.134). Выражение для $F(\omega)$ при $\omega=0$ не определено, хотя $F(0)$ существует, так как существует интеграл $F(0) = \int_0^4 f(t) dt$, равный площади фигуры на рис. 5.7. Значение $F(0)$ можно определить, совершив предельный переход.

Преобразуем $F(\omega)$ с помощью функции rectangular. Определим амплитудный $S(\omega)$ и фазовый $\Phi(\omega)$ спектры, используя панель программирования (листинг 3).

$$F(\omega) := \int_0^3 e^{-i\omega t} dt + \int_3^4 e^{-i\omega t} \cdot (4-t) dt$$

$$F(\omega) \text{ rectangular} \rightarrow \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\omega}{2}\right)}{\omega^2} + \left[\frac{1}{\omega} \cdot (\cos(3\omega) - 1) - \frac{1}{\omega} \cdot \cos(3\omega) + \frac{2}{\omega^2} \cdot \cos\left(\frac{7}{2}\omega\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\omega\right) \right] \cdot i$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) \rightarrow \frac{7}{2}$$

$$S(\omega) := \begin{cases} |F(\omega)| & \text{if } \omega \neq 0 \\ 3.5 & \text{if } \omega = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{if } \omega = 0 \\ -\arg(F(\omega)) & \text{if } \omega \neq 0 \end{cases}$$

Листинг 3

Зададим диапазон изменения ω с шагом 0,01 ($\omega := -10, -9.99..10$) и построим графики (рис. 5.8, 5.9).

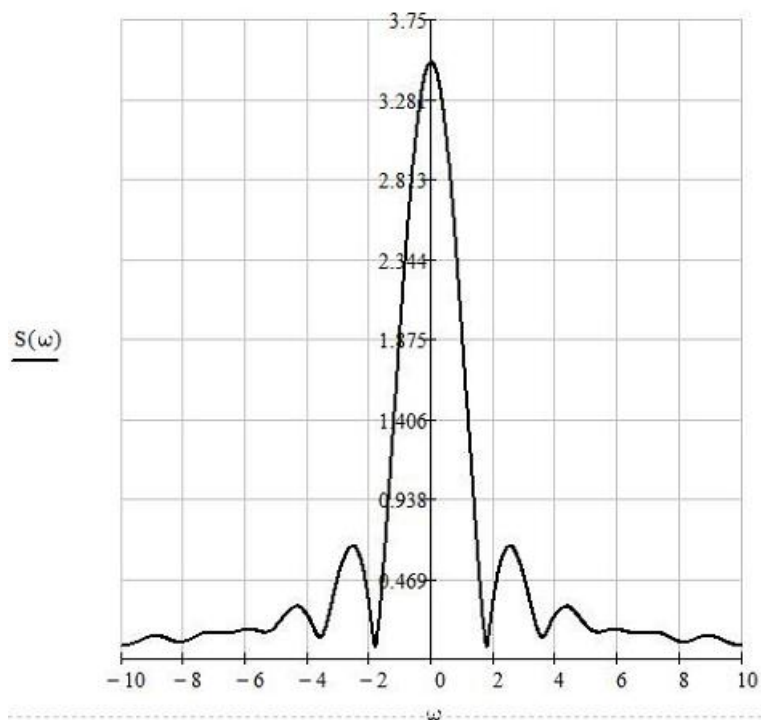


Рис. 5.8

Теперь найдем АКФ сигнала $k(\tau)$. Так как сигнал $f(t)$ отличен от нуля на интервале $t \in (0; 4)$, то АКФ отлична от нуля на промежутке $\tau \in (-4; 4)$. Поскольку $k(\tau)$ – четная функция, то достаточно определить

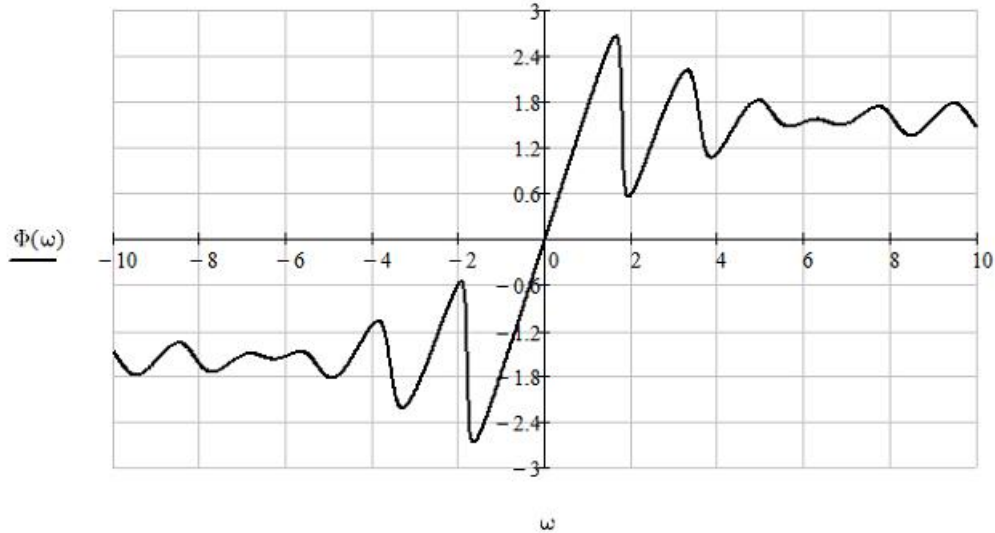


Рис. 5.9

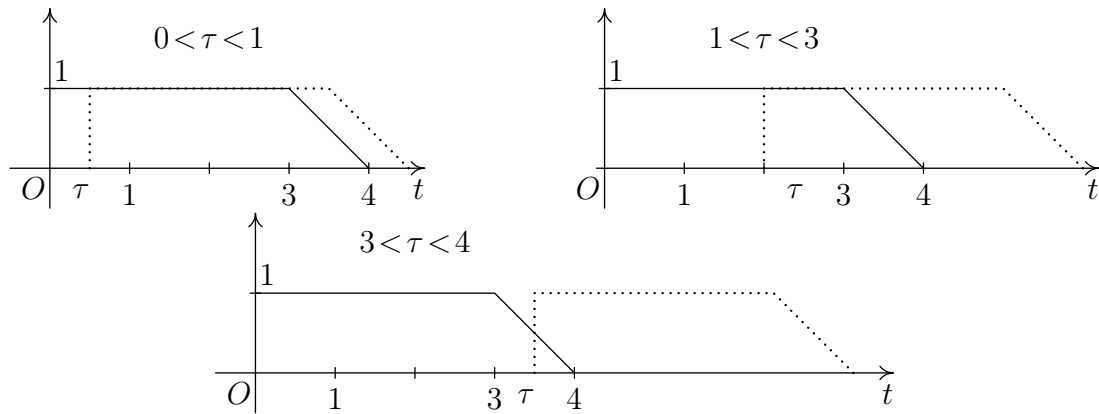


Рис. 5.10

ее для $\tau \geq 0$. Формула (1.143) в данном случае примет вид

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau) dt = \int_{\tau}^4 f(t)f(t-\tau) dt.$$

График $f(t-\tau)$ получают из графика $f(t)$ сдвигом последнего вправо на τ единиц масштаба, что иллюстрирует рис. 5.10, из которого следует, что подынтегральная функция $f(t)f(t-\tau)$ отлична от нуля только на интервале $t \in (\tau; 4)$ и задается в зависимости от значений τ следующими выражениями:

$$f(t)f(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t < 3; \\ 4-t, & 3 < t < 3+\tau; \text{ если } 0 < \tau < 1; \\ (4-t)(4-(t-\tau)), & 3+\tau < t < 4; \end{cases}$$

$$f(t)f(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t < 3; \\ 4-t, & 3 < t < 4; \end{cases} \text{ если } 1 < \tau < 3;$$

$$f(t)f(t-\tau) = 4-t, \text{ при } \tau < t < 4, \text{ если } 3 < \tau < 4.$$

Таким образом, для АКФ будем иметь три разных выражения:

$$k(\tau) = \begin{cases} f1(\tau), & 0 < \tau < 1; \\ f2(\tau), & 1 < \tau < 3; \\ f3(\tau), & 3 < \tau < 4. \end{cases}$$

Функции $f1(\tau)$, $f2(\tau)$, $f3(\tau)$ определяем, используя панель вычисления.

Обозначим через $k1(\tau)$ значения $k(\tau)$ для $0 \leq \tau \leq 4$. Наберем с клавиатуры $k1(\tau) :=$, затем два раза щелкнем по кнопке Add Line на панели "Программирование" и в отмеченные позиции перенесем полученные выражения для $f1(\tau)$, $f2(\tau)$ и $f3(\tau)$ (листинг 4). Значения АКФ для $-4 \leq \tau \leq 0$ определим как $k1(-\tau)$.

Зададим промежуток изменения τ с шагом 0,01, $\tau := -4, -3.99..4$ и построим АКФ (рис. 5.11).

$f1(\tau) := \int_{\tau}^3 1 dt + \int_3^{3+\tau} (4-t) dt + \int_{3+\tau}^4 (4-t) \cdot (4-t+\tau) dt \text{ simplify} \rightarrow \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau}{2} + \frac{10}{3}$	$f2(\tau) := \int_{\tau}^3 1 dt + \int_3^4 (4-t) dt \rightarrow \frac{7}{2} - \tau$	$f3(\tau) := \int_{\tau}^4 (4-t) dt \rightarrow \frac{(\tau-4)^2}{2}$
$k1(\tau) := \begin{cases} f1(\tau) & \text{if } (0 \leq \tau \leq 1) \\ f2(\tau) & \text{if } 1 \leq \tau \leq 3 \\ f3(\tau) & \text{if } 3 \leq \tau \leq 4 \end{cases}$	$k(\tau) := \begin{cases} k1(-\tau) & \text{if } -4 \leq \tau \leq 0 \\ k1(\tau) & \text{if } 0 \leq \tau \leq 4 \end{cases}$	

Листинг 4

5.3. Операционное исчисление в программе Mathcad

Для вычисления преобразования Лапласа функции-оригинала набираем выражение для $f(t)$, выделяем его синим уголком справа и на панели инструментов щелкаем по кнопке "Панель символьных ключевых

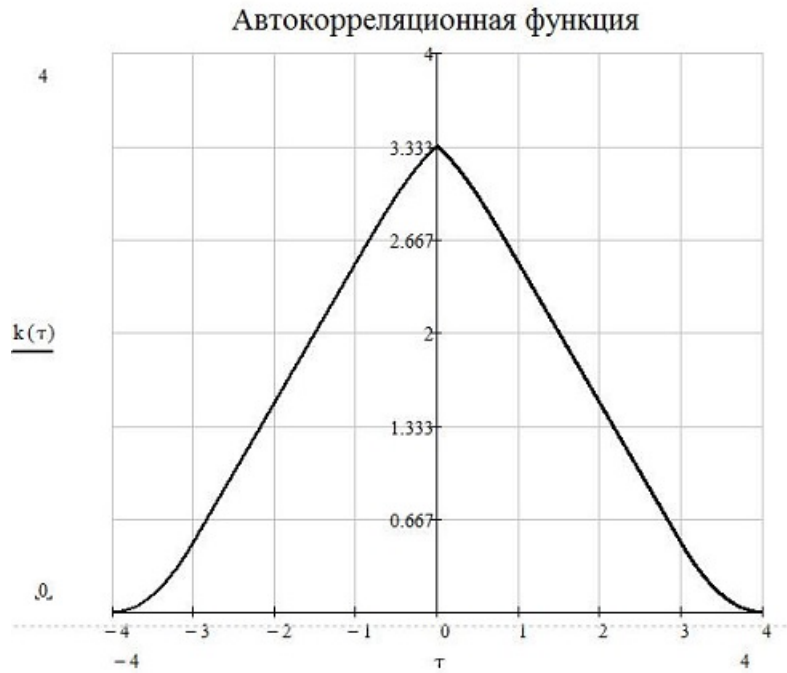



Рис. 5.11

слов”  – появится панель ”Символьная”, где выбираем кнопку ”laplace” и через запятую указываем переменную, по которой производится преобразование Лапласа. Далее нужно щелкнуть по рабочему документу вне выделенной рамки. Справа от стрелки появится результат вычисления. Обратное преобразование Лапласа производится с помощью кнопки ”invlaplace” в том же порядке, что и прямое преобразование.

П р и м е р 5.3. Найти изображение для оригинала $f(t) = te^{2t} \sin 3t$.

Решение. Набираем оригинал и используем функцию ”laplace” с панели ”Символьная”, обозначив переменную t (листинг 5).

$$t \cdot e^{2 \cdot t} \cdot \sin(3 \cdot t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{3 \cdot (2 \cdot s - 4)}{(s^2 - 4 \cdot s + 13)^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{6 \cdot (s - 2)}{(s^2 - 4 \cdot s + 13)^2}$$

Листинг 5

П р и м е р 5.4. Найти оригинал для изображения $\frac{p}{(p^2 - 1)(p^2 - 4)}$.

Решение. Набираем изображение и используем функцию ”invlaplace” с панели ”Символьная”, обозначив переменную p , а затем применяем функцию ”rectangular” (листинг 6).

$$\frac{p}{(p^2-1)(p^2-4)} \text{ invlaplace, p} \rightarrow -\frac{\cos(t \cdot i)}{3} + \frac{\cos(2i \cdot t)}{3} \text{ rectangular} \rightarrow \left| \frac{\cosh(2 \cdot t)}{3} - \frac{\cosh(t)}{3} \right.$$

Листинг 6

Если оригинал $f(t)$ отличен от нуля только на промежутке $[a; b]$, а вне его всюду равен нулю, то для выполнения прямого преобразования Лапласа используем команду символьного вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b f(t)e^{-pt} dt.$$

Пример 5.5. Найти изображение оригинала, заданного графиком (рис. 5.12).

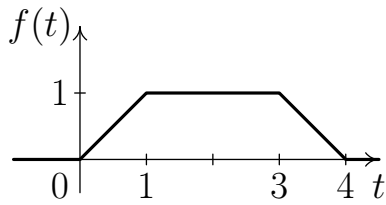


Рис. 5.12

Решение.

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0; 1], \\ 1, & t \in (1; 3), \\ 4-t, & t \in [3; 4], \\ 0, & t > 4. \end{cases}$$

Для символьного вычисления этих интегралов используем функцию "simplify" (листинг 7).

$$\int_0^1 t \cdot e^{-p \cdot t} dt + \int_1^3 e^{-p \cdot t} dt + \int_3^4 (4-t) e^{-p \cdot t} dt \text{ simplify} \rightarrow -\frac{e^{-p} + e^{-3p} - e^{-4p} - 1}{p^2}$$

Листинг 7

Пример 5.6. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1'(t) + 2y_1(t) + 2y_2(t) = e^t, \\ y_2'(t) + y_1(t) + 3y_2(t) = 2, \end{cases}$$


удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$.

Решение. Применим к обоим частям уравнений преобразование Лапласа (см. пример 2.32):

$$\begin{cases} (p+2)Y_1(p) + 2Y_2(p) = \frac{p}{p-1}, \\ Y_1(p) + (p+3)Y_2(p) = \frac{2}{p}. \end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 1 & p+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{p-1} \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A матрицу коэффициентов системы, а через B – матрицу столбец свободных членов. Чтобы задать матрицу, с клавиатуры вводим её имя и символьный знак равенства “:=”. Затем щелкаем по кнопке  (“Панель векторов и матриц”) на панели математических инструментов. Появится диалоговое окно для определения размеров матрицы. Задаем количество строк и столбцов и закрываем окно кнопкой “ОК” (рис. 5.13). На экране появится шаблон матрицы с помеченными позициями, в которые нужно ввести элементы. Аналогично задаем столбец свободных членов B . Заметим, что в программе Mathcad нумерация строк и столбцов матрицы по умолчанию начинается с 0.

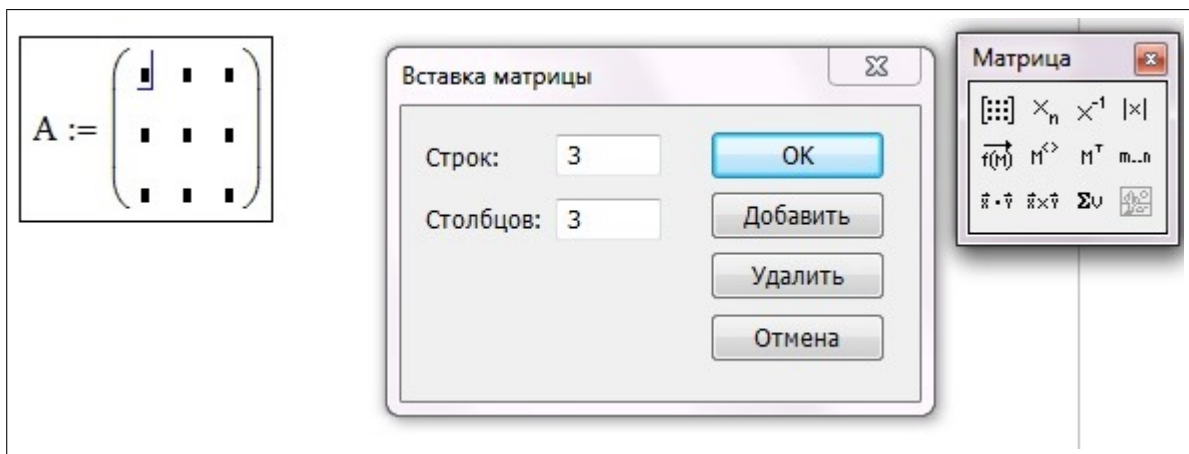



Рис. 5.13

Чтобы найти обратную матрицу A^{-1} , набираем A , выделяем его синим уголком и щелкаем по кнопке  на панели “Матрица”. Матрицу A^{-1} умножаем на столбец B , их произведение выделяем синим уголком и выполняем команду “simplify” на панели “Символьная”. Получим матрицу-столбец, элементы которой равны искомым изображениям $Y_1(p)$ и $Y_2(p)$. Выделяем полученный столбец, выполняем команду “invlaplace” с панели “Символьная”, указав через запятую переменную p , и находим столбец, элементы которого есть искомые функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ (листинг 8).

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 1 & p+3 \end{pmatrix} & B &:= \begin{pmatrix} p \\ p-1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix} \\
 \underline{F(p)} &:= A^{-1} \cdot B \text{ simplify} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{p^3 + 3 \cdot p^2 - 4 \cdot p + 4}{p \cdot (p-1) \cdot (p+1) \cdot (p+4)} \\ \frac{p^2 + 2 \cdot p - 4}{p \cdot (p-1) \cdot (p+1) \cdot (p+4)} \end{bmatrix} \\
 Y(t) &:= F(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4 \cdot t}}{15} + \frac{2 \cdot e^t}{5} - 1 \\ 1 - \frac{e^{-4 \cdot t}}{15} - \frac{e^t}{10} - \frac{5 \cdot e^{-t}}{6} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Листинг 8

$$\begin{aligned}
 y1(t) &:= \frac{5 \cdot e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4 \cdot t}}{15} + \frac{2 \cdot e^t}{5} - 1 \\
 y2(t) &:= 1 - \frac{e^{-4 \cdot t}}{15} - \frac{e^t}{10} - \frac{5 \cdot e^{-t}}{6} \\
 y1(0) &= 1 \quad y2(0) = 0 \\
 \frac{d}{dt} y1(t) + 2 \cdot y1(t) + 2 \cdot y2(t) \text{ simplify} &\rightarrow e^t \\
 \frac{d}{dt} y2(t) + y1(t) + 3 \cdot y2(t) \text{ simplify} &\rightarrow 2
 \end{aligned}$$

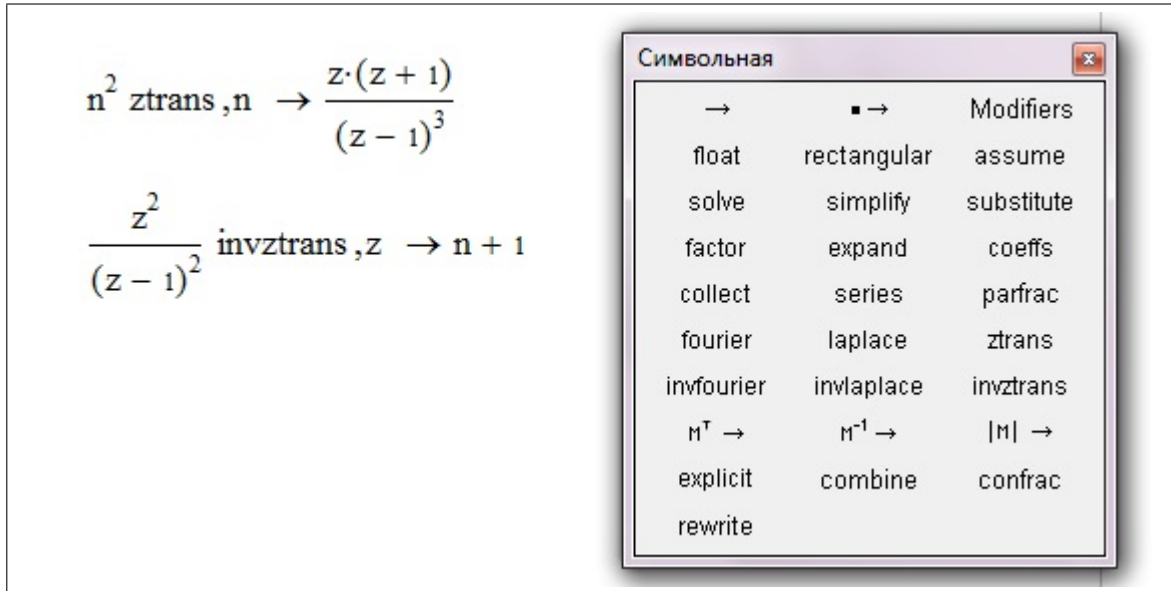
Листинг 9

Сделаем проверку полученного решения. Обозначим через $y1(t)$ и $y2(t)$ найденные функции и подставим их в уравнения системы. Для вычисления производных используем оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ с панели "Исчисление". На месте появившихся маркеров вводим переменную дифференцирования t и функцию $y1(t)$ (во втором уравнении $y2(t)$). Остальные члены левых частей уравнений вводим с клавиатуры, выделяем уравнение справа синим уголком и используем команду "simplify". Далее вычисляем начальные значения функций (листинг 9).

Из проведенных вычислений следует, что полученные функции удовлетворяют данной системе уравнений и начальным условиям.

5.4. Z-преобразование в программе Mathcad

Вычисление Z-преобразования решетчатой функции производим аналогично преобразованию Лапласа, используя кнопки "ztrans" и "invztrans" (листинг 10).



Листинг 10

Возможности программы Mathcad продемонстрируем на примере решения системы линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 5.7. Найти решение системы

$$\begin{cases} x(n+1) - 3x(n) - y(n) = (-2)^n, \\ y(n+1) + y(n) + 5x(n) = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

Решение. Применив Z-преобразование ко всем членам уравнений системы с учетом начальных условий и соответствия $Z[(-2)^n] = \frac{z}{z+2}$, получаем систему алгебраических уравнения для изображений $X(z)$ и $Y(z)$:

$$\begin{cases} (z-3)X(z) - Y(z) = 2z + \frac{z}{z+2}, \\ 5X(z) + (z+1)Y(z) = 0. \end{cases}$$

Обозначим через A матрицу системы, а через B – столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} z-3 & -1 \\ 5 & z+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2z + \frac{z}{z+2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решаем полученную систему матричным методом (листинг 11).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &:= \begin{pmatrix} z-3 & -1 \\ 5 & z+1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} z \\ z+2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 f(z) &:= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\
 \mathbf{u}(n) &:= f(z) \text{ invztrans } ,z \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{(-2)^n}{10} + (1-i)^n \cdot \left(\frac{21}{20} + \frac{47}{20} \cdot i\right) + (1+i)^n \cdot \left(\frac{21}{20} - \frac{47}{20} \cdot i\right) \\ -\frac{(-2)^n}{2} + (1-i)^n \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{23}{4} \cdot i\right) + (1+i)^n \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{23}{4} \cdot i\right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Листинг 11

Элементы матрицы-столбца $f(z)$ и есть искомые Z -изображения $X(z)$ и $Y(z)$. Используя команду "invztrans" с панели "Символьная", находим столбец $u(n)$, элементы которого – искомые решетчатые функции $x(n)$ и $y(n)$. Чтобы выделить элементы матрицы столбца как отдельные функции, используем запись $x(n) := u(n)_0$, $y(n) := u(n)_1$ (листинг 12). Для этого набираем $u(n)$, выделяем синим уголком и щелкаем по кнопке \times_n (нижний индекс) на панели "Матрица". В появившийся справа внизу от имени столбца местозаполнитель вводим желаемый индекс (0 или 1).

$$\begin{aligned}
 x(n) := u(n)_0 \text{ rectangular} &\rightarrow \frac{21 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{10} + \frac{47 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{10} - \frac{2^n \cdot \cos(\pi \cdot n)}{10} - \frac{2^n \cdot \sin(\pi \cdot n)}{10} \cdot i \\
 y(n) := u(n)_1 \text{ rectangular} &\rightarrow \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{2} - \frac{23 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{2} - \frac{2^n \cdot \cos(\pi \cdot n)}{2} - \frac{2^n \cdot \sin(\pi \cdot n)}{2} \cdot i \\
 x(n) \begin{cases} \text{substitute, } \sin(\pi \cdot n) = 0 \\ \text{substitute, } 2^n \cdot \cos(\pi \cdot n) = (-2)^n \end{cases} &\rightarrow \frac{21 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{10} + \frac{47 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{10} - \frac{(-2)^n}{10} \\
 y(n) \begin{cases} \text{substitute, } \sin(\pi \cdot n) = 0 \\ \text{substitute, } 2^n \cdot \cos(\pi \cdot n) = (-2)^n \end{cases} &\rightarrow \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{2} - \frac{23 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{4}\right)}{2} - \frac{(-2)^n}{2}
 \end{aligned}$$

Листинг 12

По смыслу задачи функции $x(n)$ и $y(n)$ – действительные величины. Поэтому с помощью кнопки "rectangular" на панели "Символьная"

в комплексных выражениях отделяем действительные и мнимые части. Полученные выражения можно упростить, так как $2^n \cos \pi n = (-2)^n$, а $\sin \pi n = 0$. Для этого используем команду "substitute" на панели "Символьная" (листинг 12).

Чтобы убедиться в правильности решения, набираем левые части разностных уравнений и щелкаем по кнопке "simplify" на панели "Символьная". В первом уравнении получим выражение $2^n e^{n\pi i}$, однако, учитывая, что $e^{n\pi i} = (-1)^n$ (используя команду "substitute"), получим $(-2)^n$. Аналогично проверяем выполнение второго уравнения и начальных условий (листинг 13). Таким образом, мы показали, что полученные функции действительно являются решением системы.

$x(n+1) - 3 \cdot x(n) - y(n)$	simplify	→	$2^n \cdot e^{\pi \cdot n \cdot i}$	substitute, $e^{i \cdot \pi \cdot n} = (-1)^n$	→	$(-2)^n$
$y(n+1) + y(n) + 5 \cdot x(n)$	simplify	→	0			
$x(0)$	→	2	$y(0)$	→	1	

Листинг 13

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ряды Фурье играют важную роль в математике и ее приложениях, поскольку дают средства для изображения и изучения функций и служат одним из аппаратов теории функций. Теория рядов Фурье "вызвала к жизни" ряд важных разделов математики, в частности теорию интеграла Фурье как предельный случай ряда Фурье.

В различных областях науки и техники встречаются периодические процессы, анализ которых невозможен без использования рядов Фурье, например в теориях радиотехнических цепей и сигналов, радионавигации, радиолокации и антенных систем, автоматического регулирования, колебаний механических систем.

Интеграл Фурье является инструментом спектрального и корреляционного анализа непериодических сигналов в радиотехнике и основой частотных методов исследования устойчивости линейных автоматических систем.

Операционное исчисление на основе интегрального преобразования Лапласа возникло во второй половине XIX века. Основные правила и теоремы операционного исчисления были получены профессором Киевского университета М. Ващенко-Захарченко и, независимо от него, Хевисайдом. Этот метод оказался очень эффективным при решении задач электротехники благодаря работам Хевисайда. Однако последний нисколько не заботился об обосновании применяемых методов и в некоторых случаях приходил к неверным результатам. Строгое математическое обоснование операционного метода дано в работах Бромвича, Джефрейса, Эфроса, Данилевского, Диткина и др.

В настоящее время задачи, для решения которых целесообразно применение преобразования Лапласа, разнообразны и многочисленны. Вот их неполный перечень: переходные процессы в электрических сетях и электронных цепях; неустановившиеся колебания в механических и электромеханических системах; системы автоматического регулирования с гибкими обратными связями (регулирование напряжения, тока, частоты, температуры, давления, скорости, уровня и расхода жидкости и т. д.); нестационарные процессы теплопроводности и диффузии; динамические процессы в сплошных средах. Таким образом, преобразование Лапласа является одним из основных математических инструментов при изучении нестационарных процессов в различных технических системах, описываемых линейными дифференциальными уравнениями.

Операционное исчисление на основе Z -преобразования используется для решения разностных уравнений, описывающих линейные дис-

кретные системы в цифровых технологиях. Дискретное преобразование Лапласа применяется для решения разностных уравнений, описывающих импульсные системы автоматического регулирования, а также при исследовании устойчивости упомянутых выше систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анферов, П.И. Математика. Ряды Фурье и интеграл Фурье : учеб. пособие / П. И. Анферов, И. В. Бусаркина, В. И. Загибалов. – Красноярск : ИПК СФУ, 2010. – 92 с.
2. Анферов, П.И. Математика. Преобразование Лапласа : учеб. пособие / П. И. Анферов, И. В. Бусаркина, В. И. Загибалов, Н. В. Панько. – Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2005. – 108 с.
3. Араманович, И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эсгольц. – М. : Наука, 1968.
4. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для вузов / С. И. Баскаков. – М. : Высш. шк., 2005. – 462 с.
5. Бэйтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. / Г. Бэйтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
6. Бугров, Я. С. Высшая математика. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2004. – 512 с.
7. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
8. Диткин, В. А. Операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Высш. шк., 1975. – 407 с.
9. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. – СПб : Лань, 2008. 448 с.
10. Ефимов, А. В. Математический анализ (специальные разделы) : учеб. для вузов : в 2 ч. Ч. 1/ А. В. Ефимов. – М. : Высш. шк., 1980. – 279 с.
11. Жуков, В. П. Задачник по курсу "Радиотехнические цепи и сигналы" : учеб. для вузов / В. П. Жуков, В. Г. Карташев, А. М. Николаев. – М. : Высш. шк., 1986. – 159 с.
12. Иванов, В. А. Математические основы теории автоматического регулирования : учеб. для вузов : в 3 т. Т. 2 / В. А. Иванов, В. С. Медведев, Б. К. Чемоданов. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. – 616 с.
13. Кирьянов, Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0 / Д. В. Кирьянов. – СПб : БХВ-Петербург, 2009. – 368 с.
14. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учеб. для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. :

Физматлит, 2004. – 572 с.

15. Краснов, М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1971.

16. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – СПб : Лань, 2002. – 688 с.

17. Очков, В. Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров : учеб. для вузов / В. Ф. Очков. – СПб : БХВ-Петербург, 2009. – 368 с.

18. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – М. : Высш. шк., 2001. – 445 с.

19. Романовский, П. И. Ряды Фурье. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа : учеб. для вузов / П. И. Романовский. – М. : Наука, 1973. – 336 с.

20. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. – СПб : БХВ-Петербург, 2013. – 768 с.

21. Толстов, Г. П. Ряды Фурье : учеб. для вузов / Г. П. Толстов. – М. : Наука, 1980. – 384 с.

22. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. для вузов : в 3 т. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2003. – 728 с.

23. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа : в 2 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – СПб : Лань, 2008. – 464 с.

24. Фукс, Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения / Б. А. Фукс, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1964.

25. Цыпкин, Я. З. Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. – М. : Физматлит, 1963. – 968 с.

26. Шилов, Г. Е. Математический анализ (второй специальный курс) / Г. Е. Шилов. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Ряды и интеграл Фурье

Скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx.$$

Норма функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} = \sqrt{(f, f)}.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(x), \quad \text{где} \quad C_i = \frac{(f, \varphi_i)}{\|\varphi_i\|^2} = \frac{\int_a^b f(x) \cdot \varphi_i(x) dx}{\int_a^b \varphi_i^2(x) dx}.$$

Равенство Парсеваля – Стеклова:

$$\int_{-l}^l f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \|\varphi_k(x)\|^2.$$

Ряд Фурье периодической функции $f(x)$ периода $2l$ по общей тригонометрической системе функций:

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Ряд Фурье периодической четной функции $f(x)$ периода $2l$ по общей тригонометрической системе функций:

$$f(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Ряд Фурье периодической нечетной функции $f(x)$ периода $2l$ по общей тригонометрической системе функций:

$$f(x) \sim S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{где} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Равенство Парсеваля – Стеклова для тригонометрического ряда Фурье:

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Комплексная форма ряда Фурье:

$$f(x) \sim S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n x}, \quad \text{где} \quad \omega_n = \frac{\pi n}{l}, \quad C_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Комплексная амплитуда: $A_n = 2C_n$.

Спектральная плотность (функция) периодического сигнала $f(t)$:

$$S(i\omega_n) = \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_n t} dt = 2l C_n.$$

Амплитудный спектр периодического сигнала $f(t)$: $S(\omega_n) = |S(i\omega_n)|$.

Фазовый спектр периодического сигнала $f(t)$: $\Phi(\omega_n) = -\arg S(i\omega_n)$.

Средняя мощность периодического сигнала $f(t)$ на единичном сопротивлении за период $2l$:

$$P = \frac{1}{2l} \int_a^b f^2(x) dx = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

Интеграл Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega,$$

где $a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$; $b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$.

Косинус-преобразование Фурье сигнала $f(t)$: $F_c(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$.

Синус-преобразование Фурье сигнала $f(t)$: $F_s(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$.

Если функция $f(x)$ – четная, то $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega$.

Если функция $f(x)$ – нечетная, то $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega$.

Интеграл Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Прямое преобразование Фурье (спектральная плотность) сигнала:

$$\hat{F}[f(x)] = F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \hat{F}^{-1}[F(i\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Свойства преобразования Фурье

1. Линейность: $\hat{F}[af_1 + bf_2] = a\hat{F}[f_1] + b\hat{F}[f_2]$, где a, b – константы.

2. Теорема запаздывания: $\hat{F}[f(t - \tau)] = e^{-i\omega\tau} F(i\omega)$.

3. Теорема подобия: $\hat{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(i\frac{\omega}{a}\right)$.

4. Теорема о модуляции:

$$\hat{F}[f(t)e^{iat}] = F[i(\omega - a)],$$

$$\hat{F}[f(t) \cos at] = \frac{1}{2} F[i(\omega - a)] + \frac{1}{2} F[i(\omega + a)],$$

$$\hat{F}[f(t) \sin at] = \frac{i}{2} F[i(\omega + a)] - \frac{i}{2} F[i(\omega - a)].$$

5. Преобразование Фурье производной сигнала: $\hat{F}\left[\frac{df}{dt}\right] = i\omega F(i\omega)$;

$$\hat{F}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = (i\omega)^n F(i\omega).$$

6. Дифференцирование изображения: $\hat{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} F(i\omega)$.

Свертка функций: $f(t) = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$.

Автокорреляционная функция:

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t + \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(i\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Энергия сигнала: $E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega$.

Энергетический спектр: $W(\omega) = |F(i\omega)|^2 = S^2(\omega)$.

Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа функции $f(t)$: $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$.

Теорема обращения: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$.

Свойство линейности: $L[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 L[f_1(t)] + C_2 L[f_2(t)]$.

Теорема запаздывания: $L[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p)$, $\tau > 0$.

Теорема затухания: $L[e^{at} f(t)] = F(p - a)$.

Теорема подобия: $L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.

Теорема дифференцирования оригинала: $L\left[\frac{df}{dt}\right] = pF(p) - f(0)$,

$$L\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Теорема интегрирования оригинала: $L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} F(p)$.

Теорема дифференцирования изображения: $L[tf(t)] = -F'(p)$,
 $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

Теорема интегрирования изображения: $L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_p^{\infty} F(q) dq$.

Теорема умножения изображений: $L\left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau\right] = F_1(p) F_2(p)$.

Интеграл Дюамеля: $L \left[f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau) d\tau \right] = pF_1(p)F_2(p)$.

Предельные соотношения: $\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty)$, $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0)$.

Z-преобразование

Z-преобразование решетчатой функции функции $f(n)$: $Z[f(n)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n}$.

Обратное Z-преобразование: $f(n) = Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z)z^{n-1} dz$.

Свойство линейности: $Z[C_1f_1(n) + C_2f_2(n)] = C_1Z[f_1(n)] + C_2Z[f_2(n)]$.

Теорема затухания: $Z[a^{-n}f(n)] = F(az)$.

Теорема запаздывания: $Z[f(n-m)] = z^{-m}F(z)$.

Теорема опережения: $Z[f(n+m)] = z^m \left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)z^{-k} \right]$.

Теорема дифференцирования изображения: $Z[nf(n)] = -z \frac{dF(z)}{dz}$.

Z-преобразование свертки функций:

$Z[f_1(n) * f_2(n)] = Z \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_1(n-k)f_2(k) \right] = F_1(z)F_2(z)$.

Z-преобразование разности: $Z[\Delta f(n)] = zF(z) - zf(0)$, $Z[\Delta^2 f(n)] = (z-1)^2 F(z) - z(z-1)f(0) - z\Delta f(0)$.

Z-преобразование суммы: $Z \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \right] = \frac{F(z)}{z-1}$.

Предельные соотношения: $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$, $\lim_{z \rightarrow \infty} z[F(z) - f(0)] = f(1)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1

Таблицы интегралов для вычисления коэффициентов рядов Фурье

1	$\int x \cos ax \, dx$	$\frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$
2	$\int x \sin ax \, dx$	$\frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$
3	$\int x^2 \cos ax \, dx$	$\frac{2x \cos ax}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \sin ax$
3	$\int x^2 \sin ax \, dx$	$\frac{2x \sin ax}{a^2} - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \cos ax$
4	$\int e^{ax} \cos bx \, dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$
5	$\int e^{ax} \sin bx \, dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$

Таблица Б.1

Преобразование Лапласа

№ п / п	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
3	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
4	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
5	$\text{sh } \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
6	$\text{ch } \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$

Окончание табл. Б.2

№п / п	Оригинал	Изображение
8	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
9	$e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$	$\frac{\beta \cos \varphi + (p - \alpha) \sin \varphi}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
10	$e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$	$\frac{(p - \alpha) \cos \varphi - \beta \sin \varphi}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
11	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}, n - \text{натуральное}$
12	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
13	$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
14	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
15	$t \operatorname{sh} \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 - \beta^2)^2}$
16	$t \operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$

Таблица Б.2

Оригиналы для дробно-рациональных функций

№п / п	Изображение	Оригинал
1	$\frac{1}{p - a}$	e^{at}
2	$\frac{1}{1 + ap}$	$\frac{1}{a} e^{-t/a}$
3	$\frac{1}{(p - a)(p - b)}$	$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$
4	$\frac{b + cp}{p(p - a)}$	$-\frac{b}{a} + \left(c + \frac{b}{a}\right) e^{at}$
5	$\frac{p}{(p - a)^2}$	$(1 + at)e^{at}$

№П / П	Изображение	Оригинал
6	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b}$
7	$\frac{b+cp}{p^2+a^2}$	$c \cos at + \frac{b}{a} \sin at$
8	$\frac{b+cp}{p^2-a^2}$	$c \operatorname{ch} at + \frac{b}{a} \operatorname{sh} at$
9	$\frac{1}{p^2+ap+b}$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} > 0$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} < 0$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} = 0$	$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} e^{-at/2} \sin \sqrt{\Delta} t$ $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} e^{-at/2} \operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t$ $te^{-at/2}$
10	$\frac{p}{p^2+ap+b}$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} > 0$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} < 0$ $\Delta = b - \frac{a^2}{4} = 0$	$e^{-at/2} \left(\cos \sqrt{\Delta} t - \frac{a}{\sqrt{2\Delta}} \sin \sqrt{\Delta} t \right) =$ $= \sqrt{\frac{b}{\Delta}} e^{-at/2} \sin(\sqrt{\Delta} t + \varphi); \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\sqrt{\Delta}}{a}$ $e^{-at/2} \left(\operatorname{ch} \sqrt{-\Delta} t - \frac{a}{2\sqrt{-\Delta}} \operatorname{sh} \sqrt{-\Delta} t \right)$ $e^{-at/2} \left(1 - \frac{at}{2} \right)$
11	$\frac{1}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{e^{at} - (1+(a-b)t)e^{bt}}{(a-b)^2}$
12	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{e^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{bt}}{(a-b)(c-b)} +$ $\frac{e^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
13	$\frac{p}{(p-a)(p-b)^2}$	$\frac{ae^{at} - (a+b(a-b)t)e^{bt}}{(a-b)^2}$

Продолжение табл. Б.3

№П / П	Изображение	Оригинал
14	$\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$	$\frac{ae^{at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{be^{bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{ce^{ct}}{(a-c)(b-c)}$
15	$\frac{p}{(p-a)^3}$	$\left(t + \frac{1}{2}at^2\right) e^{at}$
16	$\frac{1}{(p+b)(p^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2} \left(e^{-bt} - \cos at + \frac{b}{a} \sin at \right)$
17	$\frac{(p+b)^2}{p(p^2+a^2)}$	$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2-b^2}{a^2} \cos at + 2b \sin at$
18	$\frac{1}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{a^3\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \frac{at}{\sqrt{2}} \sin \frac{at}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh} \frac{at}{\sqrt{2}} \cos \frac{at}{\sqrt{2}} \right)$
19	$\frac{1}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3} (\operatorname{sh} at - \sin at)$
20	$\frac{p}{p^4+a^4}$	$\frac{1}{a^2} \sin \frac{at}{\sqrt{2}} \operatorname{sh} \frac{at}{\sqrt{2}}$
21	$\frac{p}{p^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2} (\operatorname{ch} at - \cos at)$
22	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$
23	$\frac{1}{(p^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$
24	$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2-b^2} \left(\frac{\sin bt}{b} - \frac{\sin at}{a} \right)$
25	$\frac{1}{(p^2-a^2)(p^2-b^2)}$	$\frac{1}{a^2-b^2} \left(\frac{\operatorname{sh} at}{a} - \frac{\operatorname{sh} bt}{b} \right)$
26	$\frac{1}{(p^2-a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{a^2+b^2} \left(\frac{\operatorname{sh} at}{a} - \frac{\sin bt}{b} \right)$
27	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin at$

Окончание табл. Б.3

№п / п	Изображение	Оригинал
29	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{a^4} \left(1 - \cos at - \frac{at}{2} \sin at \right)$
30	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)^2}$	$\frac{1}{a^4} \left(1 - \operatorname{ch} at + \frac{at}{2} \operatorname{sh} at \right)$
31	$\frac{1}{p(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$	$\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\cos at}{a^2} - \frac{\cos bt}{b^2} \right)$
32	$\frac{1}{p(p^2 - a^2)(p^2 - b^2)}$	$\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\operatorname{ch} at}{a^2} - \frac{\operatorname{ch} bt}{b^2} \right)$
33	$\frac{1}{(p^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5} ((3 - a^2 t^2) \sin at - 3at \cos at)$
34	$\frac{1}{(p^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{8a^5} ((3 + a^2 t^2) \operatorname{sh} at - 3at \operatorname{ch} at)$
35	$\frac{p}{(p^2 + a^2)^3}$	$\frac{t}{8a^5} (\sin at - at \cos at)$
36	$\frac{p}{(p^2 - a^2)^3}$	$\frac{t}{8a^5} (at \operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at)$
37	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$	$1 - \operatorname{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$
38	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left(-\frac{a^2}{4t} \right)$
39	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}$

Таблица Б.3

 Z -преобразование

№п / п	Оригинал	Изображение
1	$h(n)$	$\frac{z}{z-1}$
2	$e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-e^\alpha}$

Продолжение табл. Б.4

№п / п	Оригинал	Изображение
3	a^n	$\frac{z}{z-a}$
4	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
5	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
7	$C_n^m a^n$	$\frac{a^m z}{(z-1)^{m+1}}$
8	$(n+1)a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
9	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{a/z}$
10	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$
11	$\frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!}$	$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$
12	$\operatorname{sh} an$	$\frac{z \operatorname{sh} a}{z^2 - 2z \operatorname{ch} a + 1}$
13	$\operatorname{ch} an$	$\frac{z^2 - z \operatorname{ch} a}{z^2 - 2z \operatorname{ch} a + 1}$
14	$\sin an$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
15	$\cos an$	$\frac{z^2 - z \cos a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$
16	$a^n \operatorname{sh} bn$	$\frac{az \operatorname{sh} b}{z^2 - 2z \operatorname{ch} b + a^2}$
17	$a^n \operatorname{ch} bn$	$\frac{z^2 - az \operatorname{ch} b}{z^2 - 2z \operatorname{ch} b + a^2}$

Окончание табл. Б.4

№п / п	Оригинал	Изображение
19	$a^n \cos an$	$\frac{z^2 - az \cos b}{z^2 - 2z \cos b + a^2}$
20	$f(0) = 0, f(n) = \frac{1}{n}$	$\ln \frac{1}{z-1}$
21	$f(0) = 0, f(n) = \frac{(-1)^n}{n}$	$\ln \frac{z+1}{z}$

Таблица Б.4

 D -преобразование

№п / п	Оригинал	Изображение
1	$h(n)$	$\frac{e^p}{e^p - 1}$
2	$e^{\alpha n}$	$\frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$
3	a^n	$\frac{e^p}{e^p - a}$
4	n	$\frac{e^p}{(e^p - 1)^2}$
5	n^2	$\frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}$
6	na^{n-1}	$\frac{e^p}{(e^p - a)^2}$
7	$C_n^m a^n$	$\frac{a^m e^p}{(e^p - 1)^{m+1}}$
8	$(n+1)a^n$	$\frac{e^{2p}}{(e^p - a)^2}$
9	$\frac{a^n}{n!}$	e^{a-p}
10	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{e^p}{(e^p - 1)^3}$

Окончание табл. Б.4

№п / п	Оригинал	Изображение
12	$\text{sh } an$	$\frac{e^p \text{sh } a}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } a + 1}$
13	$\text{ch } an$	$\frac{e^{2p} - e^p \text{ch } a}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } a + 1}$
14	$\sin an$	$\frac{e^p \sin a}{e^{2p} - 2e^p \cos a + 1}$
15	$\cos an$	$\frac{e^{2p} - e^p \cos a}{e^{2p} - 2e^p \cos a + 1}$
16	$a^n \text{sh } bn$	$\frac{ae^p \text{sh } b}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } b + a^2}$
17	$a^n \text{ch } bn$	$\frac{e^{2p} - ae^p \text{ch } b}{e^{2p} - 2e^p \text{ch } b + a^2}$
18	$a^n \sin bn$	$\frac{ae^p \sin b}{e^{2p} - 2e^p \cos b + a^2}$
19	$a^n \cos an$	$\frac{e^{2p} - ae^p \cos b}{e^{2p} - 2e^p \cos b + a^2}$
20	$\frac{\sin \omega n}{n}$	$\omega + \text{arctg} \frac{\sin \omega}{e^p - \cos \omega}$
21	$(-1)^n \frac{\sin \omega n}{n}$	$\omega - \text{arctg} \frac{\sin \omega}{e^p + \cos \omega}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Ряды и интеграл Фурье	5
1.1. Ортогональная система функций	5
1.2. Ряд Фурье по произвольной ортогональной системе функций	8
1.3. Полные системы функций	10
1.4. Тригонометрические ряды Фурье	12
1.5. Ряд Фурье для четной и нечетной функций	15
1.6. Разложение в ряд Фурье непериодических функций	17
1.7. Комплексная форма ряда Фурье	22
1.8. Спектральный анализ периодических сигналов	24
1.9. Интеграл Дирихле. Принцип локализации	31
1.10. Поведение рядов Фурье вблизи точек разрыва. Явление Гиббса	35
1.11. Интегрирование рядов Фурье	38
1.12. Дифференцирование рядов Фурье	39
1.13. Умножение рядов Фурье	40
1.14. Интеграл Фурье	42
1.15. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье	46
1.16. Преобразование Фурье и свертка функций	49
1.17. Спектральный и корреляционный анализ непериодических сигналов	51
1.18. Преобразование Фурье неинтегрируемых функций	66
Задания для самостоятельной работы	69
2. Преобразование Лапласа	82
2.1. Функция-оригинал	82
2.2. Преобразование Лапласа. Интеграл Лапласа	83
2.3. Теорема обращения	86
2.4. Свойство линейности	90
2.5. Теорема подобия	91
2.6. Теорема запаздывания	92
2.7. Теорема опережения	94
2.8. Теорема затухания	95
2.9. Теорема дифференцирования оригинала	96
2.10. Теорема интегрирования оригинала	98
2.11. Свертка функций	100

2.12. Теорема умножения изображений	101
2.13. Интеграл Дюамеля	102
2.14. Обобщенная теорема умножения изображений	103
2.15. Теорема умножения оригиналов	107
2.16. Теорема дифференцирования изображения	108
2.17. Теорема интегрирования изображения	109
2.18. Теоремы разложения	110
2.19. Предельные соотношения	117
2.20. Формула Парсеваля	122
2.21. Дельта-функция	123
2.22. Изображение оригиналов, зависящих от второй переменной	126
2.23. Применение преобразования Лапласа к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами	128
2.24. Расчет колебательного контура	134
2.25. Решение интегральных уравнений Вольтерра с помощью преобразования Лапласа	138
2.26. Уравнения в частных производных	139
2.27. Расчет длинных линий	142
2.28. Теоремы о свойствах равномерно сходящихся несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом	146
Задания для самостоятельной работы	148
3. Z-преобразование	162
3.1. Основные определения	162
3.2. Z -преобразование	162
3.3. Свойство линейности	163
3.4. Теорема затухания	164
3.5. Теорема запаздывания	164
3.6. Теорема опережения	165
3.7. Теорема дифференцирования изображения	166
3.8. Теорема интегрирования изображения	168
3.9. Теорема дифференцирования изображения по параметру .	169
3.10. Предельные соотношения для Z -преобразования	169
3.11. Обратное Z -преобразование	170
3.12. Z -преобразование свертки решетчатых функций	175
3.13. Z -преобразование разности решетчатой функции	175
3.14. Z -преобразование суммы решетчатой функции	177
3.15. Теорема умножения оригиналов	179
3.16. Линейные разностные уравнения	180

3.17. Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами	181
3.18. Решение разностных уравнений с помощью Z -преобразования	182
3.19. Решение систем линейных разностных уравнений	186
Задания для самостоятельной работы	188
4. Дискретное преобразование Лапласа	196
4.1. Основные определения	196
4.2. Обратное D -преобразование	198
4.3. Свойство линейности	200
4.4. Теорема затухания	201
4.5. Теорема запаздывания	201
4.6. Теорема опережения	202
4.7. Теорема дифференцирования изображения	202
4.8. Теорема интегрирования изображения	203
4.9. D -преобразование разности решетчатой функции	204
4.10. D -преобразование суммы решетчатой функции	205
4.11. Теорема умножения изображений	205
4.12. Теорема умножения оригиналов	206
4.13. Предельные соотношения для D -преобразования	207
4.14. Решение разностных уравнений с помощью дискретного преобразования Лапласа	208
Задания для самостоятельной работы	209
5. Применение программы Mathcad	214
5.1. Краткие сведения об использовании программы Mathcad .	214
5.2. Спектральный анализ функций в программе Mathcad	216
5.3. Операционное исчисление в программе Mathcad	224
5.4. Z -преобразование в программе Mathcad	229
Заключение	232
Библиографический список	234
Приложение А. Основные расчетные формулы	236
Приложение Б.	241

Учебное издание

Анферов Петр Ильич
Шевелева Ирина Викторовна
Гарин Евгений Николаевич

Лютиков Игорь Витальевич
Леусенко Валерий Александрович
Кремез Николай Сергеевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ
И РАДИОНАВИГАЦИОННОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Редактор *Л.И. Вейсова*
Оформление обложки *О.А. Кравченко*
Компьютерная верстка *И.В. Шевелева*

Подписано в печать 29.10.2015. Печать плоская. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 15,75. Тираж 100 экз. Заказ № 3300

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391) 206-26-67; <http://bik.sfu-kras.ru>
E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru